

Comunicazioni Elettriche (Informatici) 2002

Alessio Soldano, Fabiana Valandro

17 giugno 2002

Indice

1	Introduzione	7
2	Segnali e sistemi	9
2.1	Classificazione generale dei segnali	9
2.2	Energia e Potenza	9
2.2.1	Segnali continui	9
2.2.2	Segnali discreti	10
2.3	Segnali base	10
2.3.1	Impulso	10
2.3.2	Gradino	11
2.3.3	Esponenziale, seno e coseno	11
2.3.4	Impulso rettangolare	12
2.3.5	Impulso triangolare	12
2.4	Sistemi	13
2.5	Risposta in frequenza	14
3	Serie e trasformata di Fourier	15
3.1	Serie di Fourier	15
3.2	Teorema di Parseval (I)	16
3.3	Densità spettrale di potenza	17
3.4	Trasformata di Fourier	17
3.4.1	Trasformate di segnali notevoli	18
3.4.2	Proprietà della trasformata di Fourier	19
3.5	Teorema di Parseval (II)	20
3.6	Comportamento asintotico	20
3.7	Trasformata di un segnale periodico	20
4	Filtri	21
4.1	Amplificatore	21
4.2	Passa-basso e passa-banda	22

5	Campionamento, ricostruzione e quantizzazione	23
5.1	Campionamento	23
5.2	Ricostruzione	24
5.2.1	Ricostruzione come segnale costante a tratti	24
5.2.2	Ricostruzione lineare	25
5.3	Aliasing	25
5.4	Discrete Time Fourier Transform (DTFT)	26
5.5	Discrete Fourier Transform (DFT)	27
5.6	Quantizzazione	28
5.6.1	Variante con blocco di espansione	29
5.6.2	Quantizzazione non uniforme	30
5.7	Errore di trasmissione	31
6	Rappresentazione dei segnali	33
6.1	Correlazione fra forme d'onda	33
6.1.1	Trasformata di Fourier della funzione di correlazione	34
6.1.2	Diseguaglianza di Schwartz	34
6.2	Rappresentazione geometrica dei segnali	34
6.3	Ortogonalizzazione di Gram-Schmitt	35
6.3.1	Esempio	37
6.4	Corrispondenza tra segnali e vettori.	37
6.5	Trasmissione di segnali numerici	39
6.5.1	Segnali antipodali, ortogonali e unipodali	39
7	Entropia e codifica di sorgente	41
7.1	L'entropia, nella sorgente senza memoria	41
7.2	Codifica a lunghezza variabile	42
7.2.1	Codifica di Huffman.	43
7.3	I codificatori universali.	44
7.4	L'entropia nella sorgente con memoria.	45
7.5	Codifica di Liv-Zempel.	45
7.6	Ridondanza di sorgente.	47
7.7	Codificatori di sorgente e irrilevanza	48
8	Trattamento segnali audio	49
8.1	Riduzione dell'irrilevanza dei segnali vocali	49
8.1.1	Sistemi DPCM e ADPCM	49
8.1.2	Sistemi Delta-Modulation e ADM	51
8.1.3	Modellazione del meccanismo di generazione dei suoni	52
8.2	Riduzione dell'irrilevanza di segnali musicali	53

9	Trattamento immagini e segnali video	55
9.1	Descrizione dei segnali video	55
9.2	Riduzione dell'irrelevanza spaziale	56
9.2.1	Trasformata DCT (Discrete Cosine Transform) e standard ISO-JPEG	56
9.2.2	Scomposizione Wavelet	58
9.3	Riduzione dell'irrelevanza temporale	58
9.4	Standard di codifica	59
10	Analisi statistica dei segnali	61
10.1	Processi casuali (aleatori)	65
10.1.1	Descrizione statistica di un processo aleatorio	66
10.1.2	Descrizione statistica di ordine 1	66
10.1.3	Descrizione statistica di ordine 2	67
10.1.4	Stazionarietà	67
10.2	Processi casuali e sistemi lineari	68
10.3	Processi casuali discreti	69
10.4	Filtri interpolatori (modulatori PAM)	70
10.5	Analisi statistica dell'errore di quantizzazione	75
10.6	Convertitori sigma-delta	76
10.7	Processi ergodici	79
11	Trasmissione di segnali analogici	83
11.1	Analisi dei disturbi	83
11.1.1	Rumore termico	84
11.1.2	Rumore nei doppi bipoli	85
11.1.3	Temperatura equivalente	85
11.2	Attenuatore passivo	86
11.3	Sistemi di trasmissione analogica	88
11.3.1	Modulazione di ampiezza	88
11.3.2	Tecniche di ottimizzazione dell'uso della banda	91
11.3.3	Influenza del rumore	91
11.3.4	Modulazione di frequenza	92
11.3.5	Segnale radio FM	95

12	Trasmissione di segnali numerici	97
12.1	Trasmissione numerica in banda base	97
12.1.1	Variante al filtro adattato	101
12.1.2	Probabilità d'errore per coppie notevoli di segnali	103
12.1.3	Interferenza intersimbolica	104
12.1.4	Impulsi di Nyquist	105
12.1.5	Impulsi base a responso parziale	108
12.2	Relazione tra potenza in trasmissione e in ricezione.	110
12.3	Rappresentazione geometrica	112
12.4	Sistemi di trasmissione con alfabeto di dimensione maggiore di due	114
12.4.1	Sistemi multilivello	116
12.4.2	Forme d'onda ortogonali	117
12.5	Velocità di trasmissione	118
12.6	Trasmissione in banda passante	118
12.6.1	Modulazione BPSK	118
12.6.2	Modulazione DPSK	120
12.6.3	Modulazione QPSK e NO-QPSK	121
12.6.4	Modulazione M-PSK	125
12.6.5	Modulazione QAM	127
13	Codifica di canale	129
13.1	Sistemi a ripetizione	130
13.2	Codificatori a blocchi	130
13.2.1	Distanza di Hamming	131
13.2.2	Decodifica Hard e Soft	131
13.3	Codifica e decodifica di codici a blocchi	133
13.3.1	Codice a ripetizione	135
13.3.2	Codice di Hamming	135
13.3.3	Codice di Hadamard	136
13.3.4	Codice Reed-Solomon (RS)	136
13.3.5	Interleaving	136
13.4	Codici convoluzionali	137
13.5	Multiplazione di più flussi su un unico canale	139
13.5.1	Sistemi di trasmissione a spettro espanso	139
13.5.2	Applicazioni in ambito militare	140
13.5.3	Applicazioni in ambito civile	141
14	Criptografia e sicurezza delle comunicazioni	143
14.1	Sistemi di cifratura a blocchi	145
14.2	Sistemi di cifratura sequenziali	147
14.3	Sistemi di cifratura a chiave pubblica	147

Capitolo 1

Introduzione

La presente dispensa contiene gli appunti del corso di Comunicazioni Elettriche (Informatici) tenuto dal professore Stefano Tubaro presso il Politecnico di Milano durante l'anno accademico 2001-2002.

Questo documento non è pensato come sostituzione dei libri di testo o della frequenza delle lezioni, bensì come strumento aggiuntivo che fornisca una linea guida sul programma svolto durante il corso.

Gli autori si sono impegnati al massimo per realizzare il presente documento, tuttavia non possono assicurare che esso sia assolutamente privo di ogni genere di errore; gli autori non si assumo dunque alcuna responsabilità per danni (o errato apprendimento) derivante dalla lettura di questo testo.

Si fa presente che non sono consentite modifiche di alcun tipo al presente documento senza l'autorizzazione esplicita degli autori o del docente S. Tubaro. E' al contrario consentita la distribuzione del documento in forma elettronica o cartacea purchè esso rimanga inalterato e completo in ogni sua parte e nessuno ne tragga vantaggio economico.

Capitolo 2

Segnali e sistemi

2.1 Classificazione generale dei segnali

Ogni tipo di comunicazione elettrica si basa su segnali; i segnali possono essere classificati nelle seguenti categorie:

- monodimensionali: $v(t)$
- multidimensionali: $T(t, x, y)$
- continui: $v(t)$
- discreti: $v(kT)$ con $t = kT$; spesso però si considera una variabile normalizzata $\bar{t} = \frac{t}{T} = k$ e si ha quindi $v(k)$
- reali
- complessi
- periodici $v(t) = v(t + nT)$

2.2 Energia e Potenza

2.2.1 Segnali continui

Se si considera un semplice bipolo elettrico costituito da un'unica resistenza R e caratterizzato da corrente $i(t)$ in ingresso e tensione $v(t)$ ai capi, si ha $P = v(t)i(t) = \frac{v^2(t)}{R}$ oppure $P(t) = \frac{|v(t)|^2}{R}$ nel caso complesso. Si definisce *Potenza istantanea normalizzata* associata a $v(t)$ la quantità $|v(t)|^2$; si definisce invece *Energia normalizzata* associata a $v(t)$ la quantità $\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt$.

Si definisce *Potenza media di $v(t)$* la quantità $P_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |v(t)|^2 dt$. Solo per segnali periodici la potenza media è quindi pari a $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |v(t)|^2 dt$.

2.2.2 Segnali discreti

I segnali discreti possono essere considerati come dei segnali continui a tratti che mantengono quindi valore costante per intervalli di tempo pari a T_c . Da un segnale continuo $v(kT_c)$ si ottiene un segnale discreto $v_c(t)$. L'energia risulta quindi pari a:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |v_c(t)|^2 dt = T_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |v(kT_c)|^2 = T_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |v(k)|^2$$

dove nell'ultima uguaglianza si considera il passaggio a tempi normalizzati.

2.3 Segnali base

2.3.1 Impulso

Caso discreto L'impulso può essere considerato come un gradino ideale; l'impulso, nel caso discreto $T=1$, è dato da:

$$\delta(n) = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

Se si considera un generico segnale $x(n)$, è possibile elencare alcune proprietà legate alla definizione di impulso:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(n) = x(0)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(n - n_0) = x(n_0)$$

$$x(n)\delta(n) = x(0)\delta(n)$$

$$x(n)\delta(n - n_0) = x(n_0)\delta(n - n_0)$$

inoltre dato che la funzione $\delta(n)$ è pari si ha:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n - m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(m - n)$$

Si noti anche che ogni segnale può essere scritto come somma di infiniti impulsi e quindi se è nota la risposta all'impulso di un dato sistema è possibile ricavare la risposta ad un qualsiasi segnale.

Caso continuo Approssimando un segnale generico con uno costante a tratti si ha:

$$T\bar{x}(nT) = \int_{nT-\frac{T}{2}}^{nT+\frac{T}{2}} x(t)dt$$

dove si considera quindi l'area sottostante ad un segnale a gradini. Si consideri allora un segnale con un unico gradino di di ampiezza T e altezza $\frac{1}{T}$ centrato per $t=0$; se si fa tendere T ad infinito si ottiene l'impulso:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{area} & \text{unitaria} \end{cases}$$

Notare quindi che un segnale $x(t) = 4\delta(t)$ non ha ampiezza pari a 4 per $t=0$ ma semplicemente è un impulso ideale di area pari a 4.

Anche per l'impulso continuo valgono proprietà analoghe a quelle del caso discreto, per cui considerando un generico segnale $x(t)$ si ha:

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t_0 - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(\tau - t_0)d\tau$$

per l'interpretazione della quale si ricordi che l'integrale di $\delta(t)$ su un intervallo $t_0 - \alpha$, $t_0 + \alpha$ è pari a 1, altrove è nullo e in quell'intervallo $x(t) \cong x(t_0)$ se α è piccolo. Inoltre:

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

2.3.2 Gradino

Nel caso discreto il gradino è dato da $u(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(m)$.

Nel caso continuo, invece, il gradino è dato da:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

dato che l'impulso ideale nel caso continuo è considerato come segnale pari.

2.3.3 Esponenziale, seno e coseno

Caso continuo Un generico segnale esponenziale può essere scritto come $x(t) = \exp[(\beta + j\omega)t] = \exp(\beta t) \exp(j\omega t) = \exp(\beta t) [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$. Volendo visualizzare il segnale in uno spazio parte reale - parte immaginaria - tempo si otterrebbe un'elica a raggio costante per $\beta = 0$ oppure una spirale che si apre o si chiude a seconda del segno di β .

Vi sono alcune relazioni che risultano di grande utilità pratica quando si ha a che fare con segnali esponenziali, sinusoidali o cosinusoidali:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

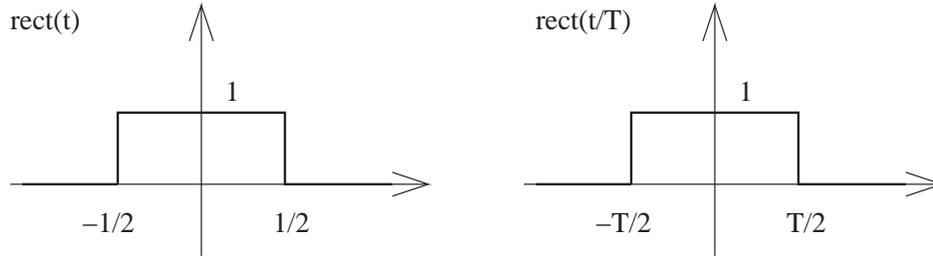


Figura 2.1: Segnale (impulso) rettangolare

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$A \sin(2\pi f t) = A \cos(2\pi f t - \frac{\pi}{2})$$

Inoltre, considerando i seguenti integrali di segnali si ha:

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(px) dx = \begin{cases} 2\pi & n = p = 0 \\ \pi & n = p \neq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(px) dx = \begin{cases} 0 & n = p = 0 \\ \pi & n = p \neq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \sin(px) dx = 0 \quad \forall n, p$$

Caso discreto L'esponenziale discreto è dato da $x(n) = \exp(j\omega n) \exp(\rho n)$ dove ω rappresenta il salto di fase fra un campione e il successivo.

A differenza del caso continuo, nel caso discreto la pulsazione ω e di conseguenza la frequenza $f = \frac{\omega}{2\pi}$ possono assumere solo determinati valori, in particolare $-\pi < \omega \leq \pi$. Attraverso f viene indicato il numero di campioni per periodo; ad esempio se fosse $f = 0.5$ vorrebbe dire avere 2 campioni per periodo; $f = 0$ indica un segnale costante. E' interessante notare che nel caso discreto occorre che ci sia un numero intero di cicli del segnale in un numero intero di campioni, ossia serve che f sia razionale ($f = \frac{k}{m}$ con k e m interi).

2.3.4 Impulso rettangolare

Il segnale o impulso rettangolare è mostrato in Figura 2.1 e si indica con $rect(t)$.

2.3.5 Impulso triangolare

Il segnale o impulso triangolare è mostrato in Figura 2.2 e si indica con $tri(t)$.

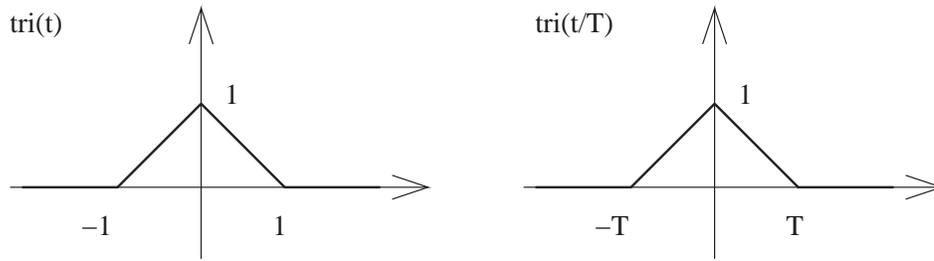


Figura 2.2: Segnale (impulso) triangolare

2.4 Sistemi

Un sistema è facilmente rappresentato in uno schema a blocchi ed è caratterizzato da un segnale in ingresso x e da uno in uscita y .

I sistemi possono essere classificati nelle seguenti categorie:

- continui
- discreti
- lineari (se $x_1 \rightarrow y_1$ e $x_2 \rightarrow y_2$ allora $(x_1 + x_2) \rightarrow (y_1 + y_2)$)
- non lineari
- tempo-varianti
- tempo-invarianti

Caso discreto Sia Γ una trasformazione lineare; l'uscita di un sistema sarà data da

$$\begin{aligned} y(n) &= \Gamma(x(n)) = \Gamma\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\Gamma(\delta(n-k)) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h_k(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \end{aligned}$$

dove $h_k(n)$ rappresenta la risposta del sistema all'impulso diverso da zero per $n = k$ mentre $h(n-k)$ rappresenta l'unica risposta all'impulso del sistema. Il risultato ottenuto è la convoluzione di $x(n)$ con $h(n)$; infatti la *convoluzione* di due segnali $x_1(n)$ e $x_2(n)$ è definita da

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k)x_2(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(n-k)x_2(k)$$

e gode delle proprietà seguenti:

- commutativa ($x_1 * x_2 = x_2 * x_1$)
- associativa ($x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$)
- distributiva ($x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$)

Caso continuo Analogamente al caso discreto sia Γ una trasformazione lineare; l'uscita del sistema sarà data da

$$y(t) = \Gamma(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\Gamma(\delta(t-\tau))d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h_{\tau}(t)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

ossia dall'integrale di convoluzione di $x(t)$ con la risposta all'impulso del sistema, $h(t)$.

Infine riguardo i sistemi occorre ricordare due utili proprietà; un sistema si dice *asintoticamente stabile* se vale

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty$$

o equivalentemente per sistemi a tempo continuo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$$

Inoltre un sistema si dice *causale* se $y(\bar{t})$ dipende da $x(t)$ per ogni $t \leq \bar{t}$; inoltre $h(k) = 0 \forall k < 0$ e $h(\tau) = 0 \forall \tau < 0$.

2.5 Risposta in frequenza

Dato un sistema con in ingresso un segnale $x(t) = e^{j2\pi ft}$ si ha che l'uscita è data da

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j2\pi f(t-\tau)}d\tau = e^{j2\pi ft} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \end{aligned}$$

e quindi indicando con $H(f)$ la quantità $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = Ae^{j\phi}$ si ha

$$y(t) = H(f)e^{j2\pi ft}$$

dove la quantità $H(f)$ è detta *risposta in frequenza* del sistema.

Ripetendo il conto appena fatto con un ingresso $x(t) = e^{-j2\pi ft}$ si ottiene in uscita $y(t) = H(-f)e^{-j2\pi ft}$. Se $h(\tau)$ è reale $H(-f) = H^*(f)$ (complesso coniugato). Inoltre, riassumendo:

$$H(f) = A(f)e^{j\phi(f)}$$

$$H(-f) = A(f)e^{-j\phi(f)}$$

Se per esempio si considera un segnale $x(t) = \cos(2\pi ft)$ è facile trovare, passando alla notazione esponenziale che l'uscita sarà data da $y(t) = A(f)\cos(2\pi ft + \phi(f))$ ossia da un segnale cosinusoidale alla stessa frequenza di quello in ingresso ma con ampiezza e fase differenti (comunque in funzione della frequenza stessa).

Capitolo 3

Serie e trasformata di Fourier

3.1 Serie di Fourier

Scopo della serie di Fourier è quello di riuscire ad esprimere un generico segnale periodico di periodo T sotto forma di somma di infinite sinusoidi (e cosinusoidi). Esistono diverse rappresentazioni analitiche della serie di Fourier, la prima è

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

con la costante A_0 che rappresenta il valore medio del segnale periodico $s(t)$ ed è data da

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt$$

mentre i coefficienti A_n e B_n sono dati da

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} dt$$

Una forma alternativa per esprimere la serie di Fourier è la seguente:

$$s(t) = C_0 + \sum C_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T} - \phi_n\right)$$

dove i coefficienti C_0 , C_n e ϕ_n sono legati a A_0 , A_n e B_n dalle relazioni

$$C_0 = A_0$$

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{B_n}{A_n}$$

Infine una terza forma per esprimere la serie di Fourier è quella esponenziale

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{\frac{j2\pi nt}{T}}$$

in cui

$$S_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-\frac{j2\pi nt}{T}} dt$$

Inoltre il coefficiente S_n può essere espresso in funzione dei coefficienti delle precedenti forme attraverso

$$S_0 = C_0$$

$$S_n = \frac{C_n}{2} e^{-j\phi_n}$$

Si noti infine che $S_{-n} = S_n^*$.

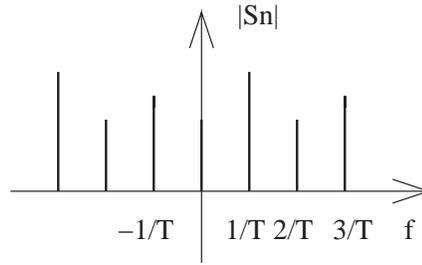
Applicabilità della serie di Fourier Affinché sia applicabile la serie di Fourier occorre che siano verificate le *condizioni di Dirichlet*. In particolare condizione sufficiente affinché si possa correttamente usare la serie di Fourier sono che la funzione $s(t)$ interessata sia assolutamente integrabile e abbia al più un numero finito di discontinuità e massimi/minimi in un periodo. Alternativamente è sufficiente che la funzione $s(t)$ sia integrabile in modulo quadro, di modo che la serie converga in media al segnale di partenza; in pratica, quindi, è sufficiente che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t) - s_n(t)|^2 dt = 0$$

3.2 Teorema di Parseval (I)

Se si considera un segnale $v(t) = C_1 \cos(\frac{2\pi t}{T} - \phi_1) + C_2 \cos(\frac{4\pi t}{T} - \phi_2)$ si può dire che la potenza media associata a $v(t)$ sia $P_v = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2}$. Analogamente esprimendo un segnale $s(t)$ attraverso le varie forme della serie di Fourier è possibile scrivere la potenza media di $s(t)$ come

$$P_s = |A_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_n|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|B_n|^2}{2} = |C_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|C_n|^2}{2}$$

Figura 3.1: Andamento dei coefficienti S_n

oppure con la forma esponenziale

$$P_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |S_n|^2$$

da cui segue il *Teorema di Parseval*

$$P_s = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |S_n|^2$$

3.3 Densità spettrale di potenza

Se si considera l'andamento del modulo dei coefficienti S_n della serie di Fourier di un segnale in funzione della frequenza, si ottiene quanto mostrato in Figura 3.1. E' possibile sommare tutti i contributi di potenza ed ottenere la *densità spettrale di potenza*

$$G_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |S_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

per cui vale anche che $\int_{-\infty}^{+\infty} G_s(f) df = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |S_n|^2 = \int_{-\bar{f}}^{\bar{f}} G_s(f) df$ dove l'intervallo fra $-\bar{f}$ e \bar{f} è quello in cui il segnale non è nullo (nel caso ci sia da considerare una funzione di trasferimento nella generazione del segnale).

Se si considera poi un sistema lineare con $s(t)$ in ingresso e $u(t)$ in uscita e dotato di risposta in frequenza $H(f)$ si ricava che $G_u(f) = |H(f)|^2 G_s(f)$.

3.4 Trasformata di Fourier

Come è stato detto un segnale periodico può essere visto come una somma di componenti spettrali con ampiezza finita e separati da intervalli finiti di frequenza $\Delta f = f_0 = \frac{1}{T}$. Ora se si fa tendere a infinito il periodo T tutti gli impulsi in frequenza si compattano verso l'origine degli assi e si ottiene al limite un segnale $s(t)$ aperiodico. Vediamo i passaggi:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{j2\pi \Delta f t} \frac{\Delta f}{\Delta f}$$

$$S_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j2\pi n t} dt = \Delta f \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j2\pi n \Delta f t} dt$$

quindi

$$\frac{S_n}{\Delta f} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j2\pi n \Delta f t} dt$$

da cui per $T \rightarrow \infty$ e $\Delta f \rightarrow 0$ si ha che

$$s(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df$$

dato che $s(t)$ diventa aperiodico e $n\Delta f$ tende alla variabile continua f . In definitiva, quindi, un segnale aperiodico può essere scritto come somma di infinite componenti esponenziali a patto che queste siano infinitamente dense e di ampiezza infinitesima.

Le formule operative per la *trasformata di Fourier* sono dunque le seguenti:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df$$

Condizione sufficiente perché esista $S(f)$ è che $s(t)$ sia assolutamente integrabile.

3.4.1 Trasformate di segnali notevoli

Vengono qui elencate le trasformate di segnali notevoli; la dimostrazione è omessa dato che lo scopo è solo quello di fornire un rapido strumento di consultazione.

- $s(t) = A \longleftrightarrow S(f) = A\delta(f)$
- $s(t) = I\delta(t) \longleftrightarrow S(f) = I$
- $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow S(f) = \frac{A}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}\delta(f + f_0)$
- $s(t) = A \sin(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow S(f) = \frac{A}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}\delta(f - f_0) + \frac{A}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}\delta(f + f_0) = \frac{A}{2j}\delta(f - f_0) - \frac{A}{2j}\delta(f + f_0)$
- $s(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow S(f) = AT \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$
- $s(t) = A \operatorname{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow S(f) = AT \left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\right)^2$
- $s(t) = u(t) = \operatorname{sca}(t) \longleftrightarrow S(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$
- $s(t) = e^{-at}u(t) \longleftrightarrow S(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$

3.4.2 Proprietà della trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier gode di diverse proprietà che vengono qui di seguito elencate.

Simmetria

$$S(f) = S^*(-f)$$

$$S^*(f) = S(-f)$$

Inoltre se $s(t)$ è reale e pari allora $S(f)$ è anch'essa reale e pari; se $s(t)$ è reale e dispari allora $S(f)$ è immaginaria e dispari. Infine se $s(t)$ è reale allora $|S(f)|$ è reale e pari.

Scalatura

$$s(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$s(-t) \longleftrightarrow S(-f).$$

Inoltre se $s(t)$ è reale allora $s(-t) \longleftrightarrow S^*(f)$ altrimenti se $s(t)$ è generica risulta che $s^*(t) \longleftrightarrow S^*(f)$.

Valore nell'origine

$$S(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt = \text{area di } s(t)$$

$$s(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df$$

Dualità

$S(t) \longleftrightarrow s(-f)$ dove con $S(t)$ si intende la trasformata vista come segnale nel tempo.

Inoltre se $s(t)$ è reale e pari vale $S(t) \longleftrightarrow s(f)$.

Traslazione

$$s(t - t_0) \longleftrightarrow S(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

$$s(t) e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow S(f - f_0)$$

Convoluzione

$$s_1(t) * s_2(t) \longleftrightarrow S_1(f) S_2(f)$$

Modulazione

$$s_1(t) s_2(t) \longleftrightarrow S_1(f) * S_2(f)$$

Per cui se considero un segnale generico moltiplicato nel tempo per una funzione coseno di frequenza f_0 , otterrò in frequenza due repliche della funzione coseno centrate in f_0 e $-f_0$.

Derivazione

$$\frac{d}{dt} s(t) \longleftrightarrow j2\pi f S(f)$$

Integrazione

$$\int_{-\infty}^t s(t) dt \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} S(f) + \frac{1}{2} \delta(f) S(0)$$

3.5 Teorema di Parseval (II)

Considerati due segnali $x(t)$ e $y(t)$ il teorema di Parseval afferma che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(-f)Y(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(-f)df \quad (3.1)$$

Per dimostrarlo si pone $z(t) = x(t)y(t)$ e $F(z(t)) = Z(f)$. $Z(0)$ corrisponde al valore del primo integrale dell'Equazione 3.1. Ma per $Z(f)$ vale la relazione:

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f - \eta)Y(\eta)d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\eta)Y(f - \eta)d\eta$$

Valutando $Z(f)$ per $f = 0$ si ottiene proprio il secondo o il terzo integrale dell'Equazione 3.1.

3.6 Comportamento asintotico

La trasformata di un segnale $x(t)$ assolutamente integrabile e con derivata ennesima impulsiva decresce asintoticamente come $|\frac{1}{f}|^n$. Infatti la derivata ennesima di $x(t)$ è impulsiva e quindi la sua trasformata contiene delle costanti (in frequenza). Ricordando che la trasformata della derivata ennesima vale $(j2\pi f)^n X(f)$, si deduce che la trasformata di $X(f)$ decrescerà appunto come $|\frac{1}{f}|^n$.

Da queste considerazioni si può concludere che segnali con andamento dolce nei tempi hanno trasformata che decresce rapidamente in frequenza e viceversa.

3.7 Trasformata di un segnale periodico

Si consideri di disporre di un segnale periodico $s_p(t)$ di periodo $T_0 = 2T$ e di volerne calcolare la trasformata di Fourier. E' possibile scrivere $s_p(t)$ in serie di Fourier ottenendo

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{\frac{j2\pi n t}{T_0}}$$

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T}^T s_p(t) e^{-\frac{j2\pi n t}{T_0}} dt$$

Chiamando poi $s(t)$ il piccolo segnale che ripetendosi dà origine al segnale periodico $s_p(t)$ si ha

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-\frac{j2\pi n t}{T_0}} dt = \frac{1}{T_0} S(f) \quad \text{con } f = \frac{n}{T_0}$$

Quindi si calcola la trasformata richiesta che risulta

$$S_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n \delta(f - \frac{n}{T_0}) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f) \delta(f - \frac{n}{T_0})$$

espressa ovviamente in funzione della trasformata del segnale base $s(t)$.

Capitolo 4

Filtri

4.1 Amplificatore

Si supponga di voler realizzare un sistema che amplifichi un segnale; lo schema a blocchi risultante prevederebbe un sistema con in ingresso un segnale $i(t)$ e in uscita un segnale $u(t) = A i(t - t_o)$, ossia l'ingresso moltiplicato per una costante e soggetto ad un inevitabile ritardo. Ragionando in frequenza si ottiene $U(f) = A e^{-j2\pi f t_o} I(f)$, dove la risposta in frequenza del sistema è $H(f) = A e^{-j2\pi f t_o}$.

L'andamento del modulo della risposta in frequenza del sistema si può pensare pressoché costante pari al valore A ; per quanto riguarda invece l'argomento della risposta in frequenza, l'ideale sarebbe un andamento costante e nullo (che darebbe quindi una risposta in frequenza $H(f)$ reale) tuttavia ciò non è fisicamente realizzabile. Ne segue che l'andamento tipico di $H(f)$ sia quello mostrato in Figura 4.1. Per ricavare la caratteristica di un dato amplificatore si può procedere mandando in ingresso uno scalino: in uscita non si otterrà un vero e proprio scalino amplificato dato che vi sarà un periodo di transizione durante il quale l'uscita sale velocemente (ma non istantaneamente) dal valore nullo a quello di regime, $|H(f)|$. Osservando il transitorio è possibile ricavare l'argomento di $H(f)$ che indichiamo con $\beta(f)$.

Per quanto concerne il ritardo introdotto, va detto che esso è composto da due differenti fattori. Si consideri in ingresso un segnale del tipo $i(t) = m(t) e^{j2\pi f_c t}$ che si trasforma in $I(f) = M(f - f_c)$: si trova che $\beta(f) \simeq -2\pi f_c \tau_p - 2\pi(f - f_c)\tau_g$ dove τ_p è detto *ritardo di fase* e può essere reso piccolo a piacere mentre τ_g è detto *ritardo di gruppo* ed è affetto da vincoli di fisicità e non può quindi essere reso piccolo a piacere. In uscita si trova un segnale dato da $u(t) = |H(f_c)| e^{j2\pi f_c(t - \tau_p)} m(t - \tau_g)$ e si nota quindi che il ritardo di gruppo va ad impattare sulla parte $m(t)$ del segnale di ingresso.

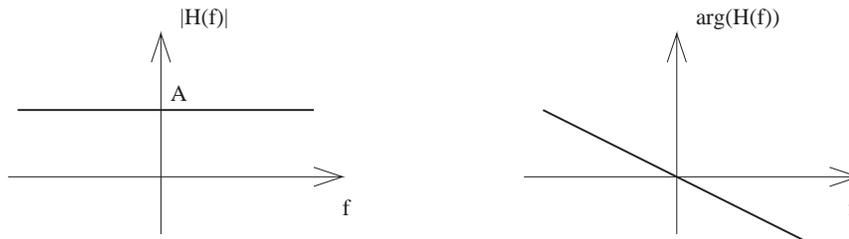


Figura 4.1: Risposta in frequenza amplificatore

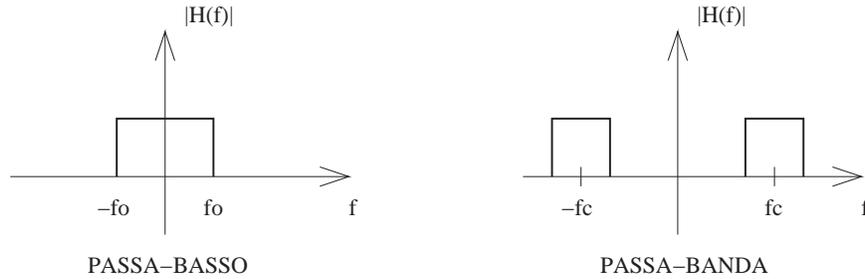


Figura 4.2: Passa-basso e passa-banda

4.2 Passa-basso e passa-banda

I sistemi o filtri passa-basso e passa-banda sono caratterizzati dall'andamento del modulo della risposta in frequenza mostrato in Figura 4.2.

E' interessante notare che moltiplicando nel dominio del tempo la risposta all'impulso di un sistema per un coseno si può passare facilmente da un comportamento di tipo passa-basso ad uno di tipo passa banda dato che la trasformata di Fourier del coseno è data da due impulsi.

Riguardo il sistema passa-basso è da notare che se si calcola la risposta all'impulso (mediante antitrasformazione della risposta in frequenza) si ottiene una funzione seno cardinale che ovviamente si estende anche per $t < 0$; tale fatto implica la non causalità del sistema e di conseguenza l'impossibilità pratica di realizzare un sistema passa-basso con la caratteristica mostrata in Figura 4.2. Il motivo di questa non-causalità è da ricercarsi nelle transizioni eccessivamente ripide che si presentano per $f = f_0$ e $f = -f_0$ nella caratteristica del passa-basso. Una risposta all'impulso accettabile sarebbe quella ottenibile dal seno cardinale che si avrebbe nel caso sopra descritto, ma troncato al di fuori dell'intervallo $[-t_0, t_0]$ e ritardato di t_0 di modo da avere valore nullo per tempi negativi e soddisfare le condizioni di causalità. Campionamento, ricostruzione e quantizzazione.

Capitolo 5

Campionamento, ricostruzione e quantizzazione

5.1 Campionamento

Il *campionamento* è la prima operazione che viene eseguita nel processo di conversione di un segnale da analogico a digitale. Essenzialmente consiste nel memorizzare il valore di un segnale continuo solo in determinati istanti di tempo; la distanza fra due istanti successivi in cui viene preso un campione è detta periodo di campionamento. La frequenza di campionamento è l'opposto del periodo ed è data da $f_c = \frac{1}{T}$.

La bontà del campionamento dipende dalla frequenza di campionamento; frequenze alte (campioni fitti) implicano in seguito una buona ricostruzione del segnale ma possono significare anche una quantità eccessiva di informazioni memorizzate.

Per la realizzazione di un campionatore si procede utilizzando un segnale di controllo costituito da un treno di impulsi a distanza T e moltiplicandolo per il segnale da campionare, $s(t)$. Facendo poi la trasformata di Fourier si ottiene il segnale $S_c(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f - kf_c)$ mostrato in Figura 5.1; in rosso è indicata la trasformata di Fourier del segnale di partenza, $S(f)$. Con f_m è indicata la frequenza massima del segnale $s(t)$. Perché possa in seguito essere ricostruito il segnale $s(t)$, occorrerà mettere un filtro (indicato in azzurro in Figura 5.1) che lasci passare tutte

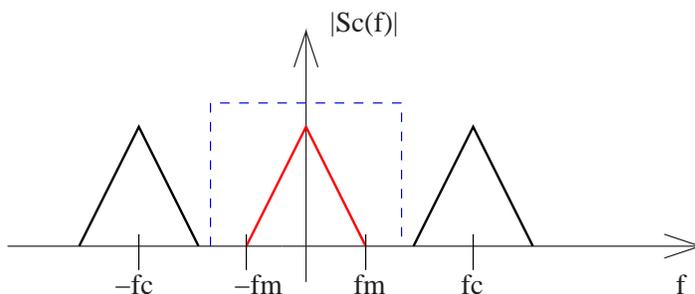


Figura 5.1: Campionatore - Ricostruttore

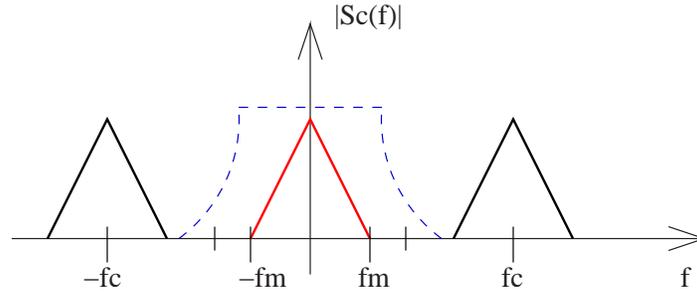


Figura 5.2: Campionatore - Ricostruttore fisicamente realizzabile

le frequenze fra $-\frac{f_c}{2}$ e $\frac{f_c}{2}$ (detta *frequenza di Nyquist*) e tagli tutte quelle esterne. Affinché la ricostruzione sia corretta serve che in fase di campionamento sia rispettato il *Teorema del campionamento* ossia è necessario che

$$f_c > 2f_m$$

Per quanto riguarda la frequenza massima del segnale $s(t)$ occorre notare quanto segue: normalmente si lavora con segnali limitati nel dominio del tempo e di conseguenza illimitati nel dominio delle frequenze, quindi verrebbe da pensare che i normali segnali di nostro interesse non possano soddisfare in nessun modo il teorema del campionamento. Ovviamente quindi si considera normalmente un limite in frequenza oltre il quale trascurare (in fatto di ampiezza) il segnale.

5.2 Ricostruzione

Come detto precedentemente, per poter ricostruire un segnale campionato occorre applicare un filtro che conservi la parte del segnale $S_c(f)$ compresa fra le frequenze $-\frac{f_c}{2}$ e $\frac{f_c}{2}$. Tuttavia un filtro come quello di Figura 5.1 è caratterizzato sicuramente da una risposta all'impulso non causale e quindi non è fisicamente realizzabile. Per tale motivo vengono generalmente realizzati filtri con pendenze meno ripide in prossimità della frequenza di Nyquist; filtri di questo tipo, però taglierebbero l'asse delle frequenze oltre la frequenza di Nyquist con il conseguente rischio di passaggio di componenti dei campioni successivi (dopo quello centrale, da ricostruire) anche se piuttosto attenuate. Tale effetto influirebbe negativamente sulla precisione nella ricostruzione del segnale. Si procede quindi scegliendo una frequenza di campionamento un po' più elevata di modo che la frequenza di Nyquist superi con un adeguato margine la frequenza massima del segnale da ricostruire, di modo da ottenere una situazione ottimale come quella mostrata in Figura 5.2.

Per considerare un esempio pratico, i segnali audio vengono tipicamente campionati a 44.1 kHz o a 48 kHz nonostante l'orecchio umano riesca a distinguere solo le frequenze fino a 42 kHz, soglia oltre la quale si potrebbe trascurare ogni informazione portata dal segnale.

5.2.1 Ricostruzione come segnale costante a tratti

In certe situazioni potrebbe essere sufficiente ottenere dalla ricostruzione un segnale costante a tratti; per avere ciò si effettua la convoluzione nel dominio del tempo dei

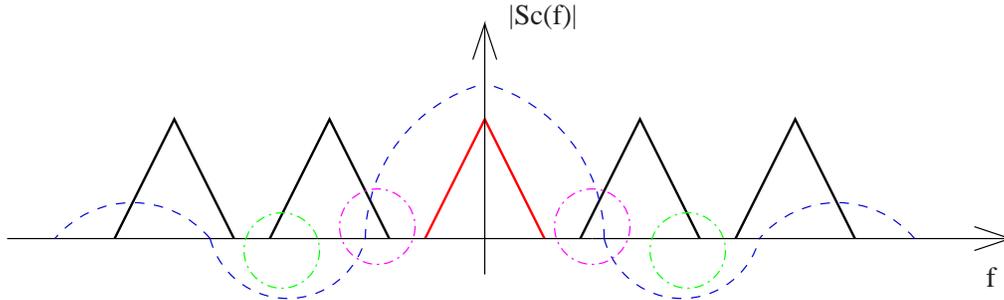


Figura 5.3: Ricostruttore come segnale costante a tratti

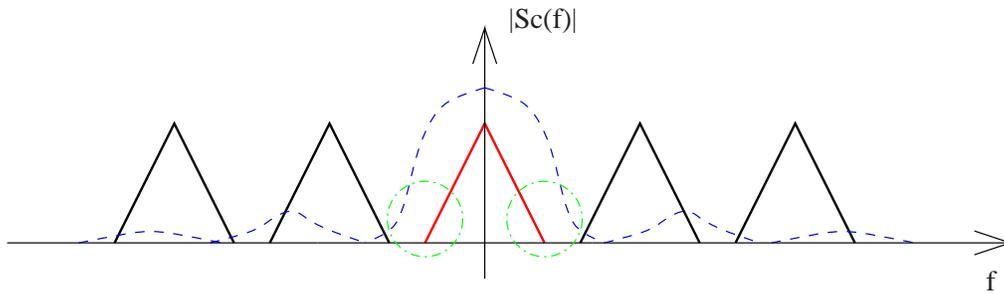


Figura 5.4: Ricostruttore lineare

campioni con una risposta all'impulso a rettangolo $h(t) = \frac{1}{T} \text{rect}(\frac{t}{T})$. La ricostruzione non è perfetta (infatti viene il segnale costante a tratti che ci si aspetta) poiché la trasformata dell'impulso rettangolare $h(t)$ è un seno cardinale e quindi, come si nota in Figura 5.3, durante la ricostruzione viene lasciata passare parte delle repliche periodiche del segnale (zone cerchiata in rosa) oltre ad altre componenti in alta frequenza (zone cerchiata in verde) anche se attenuate.

5.2.2 Ricostruzione lineare

Altra possibilità è quella di realizzare un ricostruttore che produca un segnale a tratti lineari; per ottenere ciò si effettua la convoluzione nel dominio del tempo dei campioni con una risposta all'impulso a triangolo $h(t) = \text{tri}(\frac{t}{T})$. La trasformata di $h(t)$ risulta $H(f) = \frac{\sin^2(\pi fT)}{(\pi fT)^2}$ e quindi in ricostruzione si ha come difetto il fatto che le frequenze abbastanza alte (vicino a f_m) vengono attenuate molto, come si nota in Figura 5.4.

In genere infine si utilizza un ulteriore filtro in cascata che amplifica le componenti alle frequenze penalizzate dal ricostruttore appena descritto e attenua quelle a frequenze molto alte che erano comunque passate (anche se molto attenuate). L'andamento del modulo della $H(f)$ di questo filtro è mostrata in Figura 5.5.

5.3 Aliasing

Un'errata scelta della frequenza di campionamento porta ad una cattiva ricostruzione del segnale a causa di un effetto detto *aliasing*; tipicamente a causa di una

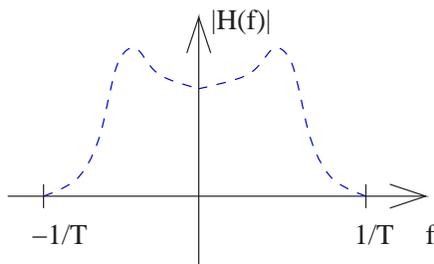


Figura 5.5: Filtro finale del ricostruttore

frequenza di campionamento troppo bassa si ricostruisce un segnale che è in realtà il risultato della sovrapposizione di più parti del segnale di partenza ripetute periodicamente.

Per prevenire questo problema e poiché generalmente non si conosce la frequenza massima di un segnale e sarebbe quindi difficile stabilire una frequenza di campionamento adatta, si interviene utilizzando un filtro detto *antialiasing* che impone una banda limitata e prestabilita al segnale da trattare. Fatto ciò il campionamento può avvenire senza problemi.

Un altro accorgimento che si può usare è quello di campionare ad una frequenza molto più alta di quella che sarebbe strettamente necessaria; non occorre in questo caso utilizzare filtri antialiasing e si provvede più tardi, attraverso un filtraggio numerico, a sotto campionare il segnale ottenuto per limitare il quantitativo di informazioni da memorizzare.

5.4 Discrete Time Fourier Transform (DTFT)

Nel Capitolo 2 è stata illustrata la trasformata di Fourier di generici segnali continui o discreti; ci si propone ora di trattare la trasformata di Fourier per segnali campionati. Si supponga di disporre del segnale campionato $s_c(t) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\delta(t - nT)$, applicandoci la trasformata di Fourier si ottiene:

$$\begin{aligned} S_c(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_c(t)e^{-j2\pi ft} dt = T \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nt)\delta(t - nT)e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)e^{-j2\pi ft} dt = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)e^{-j2\pi fnT} \end{aligned}$$

da cui, considerando tempi normalizzati $\frac{t}{T}$, si ricava

$$S_c(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)e^{-j2\pi fn}$$

che insieme alla trasformazione inversa

$$s(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_c(f)e^{j2\pi fn} df$$

è detta *Discrete Time Fourier Transform* o brevemente *DTFT*.

Questa trasformazione consente di ottenere da un segnale campionato nel tempo un altro segnale continuo nel dominio delle frequenze; tale fatto non è esattamente quanto di meglio ci si sarebbe aspettati, visto che sarebbe stato meglio ottenere un segnale in frequenza anch'esso campionato.

5.5 Discrete Fourier Transform (DFT)

Consideriamo il segnale continuo $s(t)$ e la sua versione campionata $s_c(t)$ (con periodo di campionamento pari a T e area degli impulsi di campionamento sempre pari a T):

$$s_c(t) = s(t)T \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT) = T \sum_{m=-\infty}^{+\infty} s(mT)\delta(t - mT)$$

Se moltiplichiamo $s_c(t)$ per una finestra rettangolare di ampiezza unitaria che contenga N campioni e di lunghezza $(N-1)T$ otteniamo $s_t(t)$. A questo punto si può rendere periodico il segnale $s_t(t)$ con periodo $T_0 = NT$ ottenendo $s_{tp}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_t(t - kT_0)$ la cui trasformata di Fourier è

$$S_{tp}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n \delta(f - \frac{n}{T_0})$$

dove gli S_n sono i coefficienti della serie di Fourier associati al segnale periodico $s_{tp}(t)$:

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} T \sum_{m=0}^{N-1} s(mT)\delta(t - mT) e^{-j2\pi \frac{n}{T_0} t} dt = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} s(mT) e^{-j2\pi \frac{nm}{N}}$$

Volendo ricostruire i campioni di $s_{tp}(t)$ occorre filtrare $S_{tp}(f)$ di modo da eliminare tutte le ripetizioni periodiche dello spettro tranne quella centrata intorno allo zero e poi antitrasformare in corrispondenza degli istanti di campionamento; si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} s(mT) &= \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} S_{tp}(f) e^{j2\pi f m T} df = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n \delta(f - \frac{n}{T_0}) e^{j2\pi f m T} df = \\ &= \sum_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} S_n e^{j2\pi \frac{nm}{N}} = \sum_{m=0}^{N-1} S_n e^{j2\pi \frac{nm}{N}} \end{aligned}$$

In definitiva, considerando tempi normalizzati, si ricavano le relazioni della *Discrete Fourier Transform* o *DFT*

$$S(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} s(m) e^{-j2\pi \frac{nm}{N}}$$

$$s(m) = \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{j2\pi \frac{nm}{N}}$$

dove gli $S(n)$ rappresentano le aree degli impulsi della trasformata.

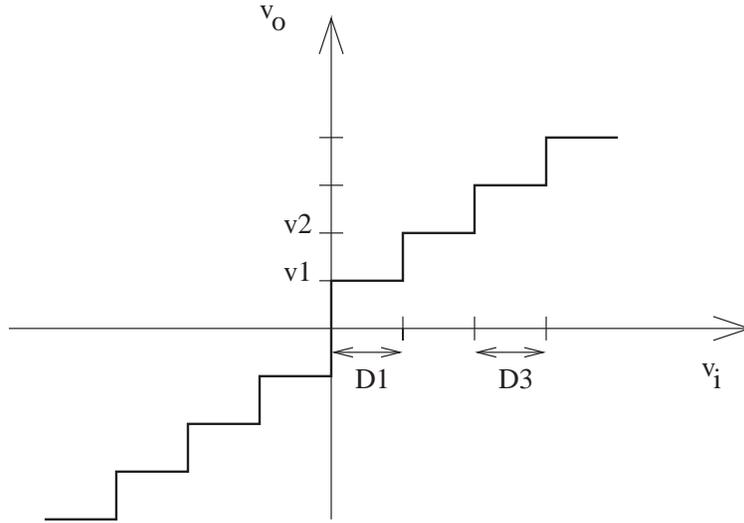


Figura 5.6: Caratteristica del quantizzatore

5.6 Quantizzazione

Il processo di trasformazione di un segnale analogico in digitale prevede, dopo il campionario, la presenza di un quantizzatore e, in seguito di un blocco di codifica. La funzione del quantizzatore è quella di trasformare i campioni che riceve dal campionario in informazioni espresse con un numero massimo di valori stabilito a priori (dipende dal quantizzatore), ad esempio 256. Essenzialmente, se v_i è il segnale in ingresso al quantizzatore e v_o è quello prodotto in uscita, la caratteristica del quantizzatore risulta essere quella mostrata in Figura 5.6. In particolare, i valori sull'asse del segnale in ingresso sono detti *soglie di quantizzazione* e distano un *intervallo di quantizzazione* (Δ_i) l'una dall'altra; i valori sull'asse del segnale in uscita, invece, si dicono *livelli di restituzione* e ovviamente il loro numero rappresenta il numero massimo di valori distinti che il quantizzatore può produrre in uscita.

Per come è definito, il processo di quantizzazione introduce certamente un errore nel segnale, un rumore e_q . Al fine di valutare la bontà del quantizzatore e di conseguenza la fedeltà a segnale di partenza di quello ottenuto, si considera generalmente il rapporto fra le potenze del segnale ottenuto e del rumore introdotto, $\frac{S}{N}$.

La potenza dell'errore di quantizzazione $N = E[e_q^2]$ si calcola come segue, considerando che $f(v_i)$ rappresenta la densità di probabilità delle ampiezze del segnale in ingresso:

$$N = \int_{v_1 - \frac{\Delta_1}{2}}^{v_1 + \frac{\Delta_1}{2}} (v_i - v_1)^2 f(v_i) dv_i + \int_{v_2 - \frac{\Delta_2}{2}}^{v_2 + \frac{\Delta_2}{2}} (v_i - v_2)^2 f(v_i) dv_i + \dots$$

Se si considera poi $\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta$ si ha quella che viene normalmente chiamata *quantizzazione uniforme*. In questo se si assume che gli intervalli Δ siano piccoli, $f(v_i)$ può essere considerata costante e pari al valore dei livelli, inoltre si può introdurre la variabile $x = v_i - v_1 = v_i - v_2 = \dots$. Si ottiene quindi

$$N = (f(v_1) + f(v_2) + \dots) \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^2 dx = (f(v_1) + f(v_2) + \dots) \frac{\Delta^3}{12}$$

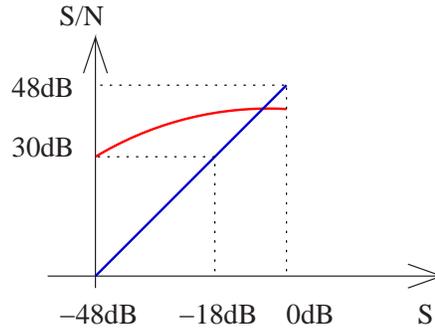


Figura 5.7: Rapporto segnale-rumore in funzione del segnale

e poiché $(f(v_1) + f(v_2) + \dots)\Delta \simeq 1$ (area sottesa alla densità di probabilità delle ampiezze) si ottiene infine

$$N = \frac{\Delta^2}{12}$$

Valutiamo ora la potenza del segnale, S ; si supponga che esso abbia una dinamica compresa fra $-V$ e V e una distribuzione di probabilità costante, $f(v_i) = \frac{1}{2V}$. La potenza del segnale risulta quindi:

$$S = E[v_i^2] = \int_{-V}^V v_i^2 \frac{1}{2V} dv_i = \frac{V^2}{3}$$

Il rapporto segnale-rumore è quindi

$$\frac{S}{N} = \frac{\frac{V^2}{3}}{\frac{\Delta^2}{12}}$$

e dato che $\Delta = \frac{2V}{M}$ dove $M = 2^n$ rappresenta la codifica in binario con n cifre si ottiene infine

$$\frac{S}{N} = 2^{2n}$$

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{dB} \simeq 6n$$

5.6.1 Variante con blocco di espansione

Uno dei campi di applicazione del quantizzatore è la conversione analogico-digitale dei segnali vocali; affinché i segnali audio in questione rimangano sufficientemente fedeli all'originale e quindi comprensibili (si pensi ad esempio ad una comunicazione telefonica) occorre che il rapporto segnale-rumore si mantenga su buoni livelli indipendentemente dal tono della voce che viene registrata. In Figura 5.7 è riportato in blu l'andamento del rapporto segnale-rumore in funzione dell'intensità del segnale vocale considerato; affinché la comunicazione si mantenga su standard qualitativi accettabili serve che il rapporto segnale-rumore non scenda mai sotto i 30dB, che

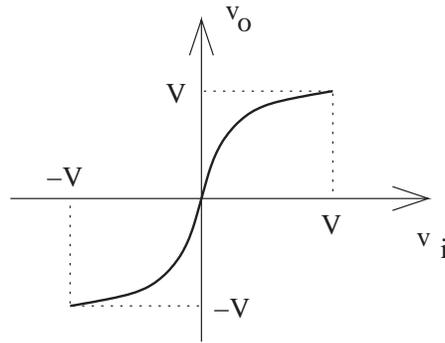


Figura 5.8: Blocco di espansione

si ottengono in corrispondenza di un segnale da -18dB. Come si può facilmente notare, la caratteristica in blu, corrispondente al campionatore descritto al paragrafo precedente non assicura una buona comunicazione in caso di segnali di intensità inferiore ai -18dB.

Per risolvere questo problema sono utilizzabili due varianti al quantizzatore descritto in precedenza:

- quantizzatore ad ampiezze variabili
- aggiunta di un blocco di espansione prima del quantizzatore

Le caratteristiche del quantizzatore ad ampiezze variabili saranno descritte in seguito. Per quanto riguarda la prima soluzione, invece, ci si serve di un blocco dotato della caratteristica mostrata in Figura 5.8, ossia:

$$v_o = V \frac{\ln(1 + \mu \frac{v_i}{V})}{\ln(1 + \mu)}$$

Il segnale da quantizzare viene prima fatto passare nel filtro di espansione e poi viene mandato al quantizzatore uniforme descritto in precedenza. Il risultato complessivo, in termini di andamento del rapporto segnale-rumore in funzione del segnale in ingresso, è mostrato in rosso in Figura 5.7.

5.6.2 Quantizzazione non uniforme

Il quantizzatore non uniforme si differenzia da quello uniforme poiché non ha gli intervalli di quantizzazione tutti uguali e costanti. Si supponga che la densità di probabilità delle ampiezze f_{v_i} del segnale in ingresso v_i sia costante e che il numero di intervalli di quantizzazione sia fissato pari a M . Serve un algoritmo per scegliere il numero di bit e gli intervalli di quantizzazione minimizzando la potenza dell'errore di quantizzazione.

Facendo riferimento alla Figura 5.9, la funzione che andrebbe minimizzata sarebbe

$$N_q = \sum_k \int_{d_{k-1}}^{d_k} f(v_i)(v_i - r_k)^2 dv_i$$

tuttavia non esiste una soluzione in forma chiusa di questo problema di minimo. Esiste tuttavia una soluzione algoritmica che porta al *Quantizzatore di Lloyd-Max*

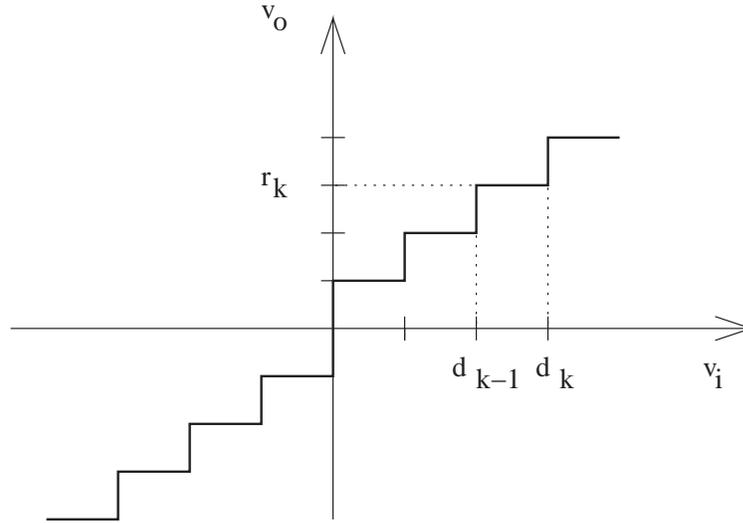


Figura 5.9: Quantizzatore non uniforme

e si ottiene applicando ricorsivamente fino ad ottenere valori stabili una delle due formule seguenti, a seconda che sia noto d_k o r_k :

$$r_k = \frac{\int_{d_{k-1}}^{d_k} a f_{v_i}(a) da}{\int_{d_{k-1}}^{d_k} f_{v_i}(a) da}$$

$$d_k = \frac{r_{k+1} + r_k}{2}$$

5.7 Errore di trasmissione

La fase successiva alla quantizzazione e codifica dei campioni è quella della trasmissione del segnale stesso che verrà poi ricevuto e decodificato. Durante la fase di trasmissione vi è la possibilità che insorgano errori dovuti a bit che giungono corrotti al decodificatore. Si indica con $p(\varepsilon)$ la probabilità che ciascun singolo bit arrivi corrotto: tale valore è in genere molto basso, tipicamente $p(\varepsilon) \sim 10^{-4}$, perciò la probabilità che una parola contenga più di un bit corrotto è trascurabile.

Ovviamente, l'effetto di un errore di trasmissione è tanto più grave quanto più è significativa la cifra binaria interessata dall'errore stesso; al massimo un errore corrisponde a metà della dinamica del segnale trasmesso. Si può quindi calcolare la potenza legata all'errore su una parola:

$$\bar{e}_p^2 = \frac{1}{N} [\Delta^2 + (2\Delta)^2 + (4\Delta^2) + \dots + (2^{N-1}\Delta)^2] = \frac{2^{2N} - 1}{3N} \Delta^2 \simeq \frac{2^{2N}}{3N} \Delta^2$$

dove N è il numero di bit per una parola e si sono considerati i vari contributi a seconda che l'errore capiti su una cifra più o meno significativa. Tuttavia ovviamente non tutte le parole giungono affette da errore e occorre quindi calcolare anche la probabilità che una parola contenga un errore:

$$P_{\text{errore su parola}} = Np(\varepsilon)(1 - p(\varepsilon))^{N-1} \simeq Np(\varepsilon)$$

dato che $(1 - p(\varepsilon))^{N-1} \simeq 1$ viste le dimensioni di $p(\varepsilon)$. Ne segue quindi che la potenza dell'errore di trasmissione risulta essere pari a

$$N_p = \frac{2^{2N}}{3} \Delta^2 p(\varepsilon)$$

A differenza dell'errore di quantizzazione che è immutabile, l'errore di trasmissione può variare (e quindi tipicamente peggiorare) a seconda delle circostanze, quindi generalmente si cerca di rendere il rapporto segnale rumore il più possibile indipendente da piccole variazioni di $p(\varepsilon)$.

Ad ogni modo in definitiva il rapporto segnale-rumore, considerato che $2V = 2^N \Delta$, risulta essere pari a

$$\frac{S}{N} = \frac{S}{N_p + N_q} = \frac{\frac{V^2}{3}}{\frac{2^{2N}}{3} \Delta^2 p(\varepsilon) + \frac{\Delta^2}{12}} = \frac{2^{2N}}{1 + 4p(\varepsilon)2^{2N}}$$

Capitolo 6

Rappresentazione dei segnali

6.1 Correlazione fra forme d'onda

Se si considerano segnali ad energia finita si definisce la correlazione fra due segnali $v_1(t)$ e $v_2(t)$ come

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(t)v_2^*(t-\tau)dt$$

dove con $v_2^*(t)$ si indica il segnale complesso coniugato di $v_2(t)$. Si noti inoltre che vale $R_{21}(\tau) = R_{12}^*(\tau)$.

Qualora si sia invece in presenza di segnali a potenza finita, la funzione di correlazione è data da

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v_1(t)v_2^*(t-\tau)dt$$

che nel caso di segnali periodici si riduce a

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v_1(t)v_2^*(t-\tau)dt$$

dove T_0 rappresenta il periodo delle due forme d'onda qualora questo sia lo stesso per entrambe; nel caso invece i due segnali abbiano periodo diverso, T_0 deve contenere un numero intero di periodi di $v_1(t)$ e $v_2(t)$.

Una volta definita la funzione di correlazione fra due segnali è possibile calcolare l'energia della somma di due segnali ritardati uno dall'altro:

$$v_{tot} = v_1(t) + v_2(t-\tau)$$

$$E_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} |v_1(t) + v_2(t-\tau)|^2 dt = E_1 + E_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(t)v_2^*(t-\tau)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} v_1^*(t)v_2(t-\tau)dt =$$

$$= E_1 + E_2 + R_{12}(\tau) + R_{21}(-\tau) = E_1 + E_2 + R_{12}(\tau) + R_{12}^*(\tau) = E_1 + E_2 + 2\text{Re}[R_{12}(\tau)]$$

Nel caso in cui $v_1(t) = v_2(t)$ si ha

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(t)v_1^*(t-\tau)dt$$

e quindi $R(0) = E_1$, $R(\tau) = R^*(-\tau)$ e $|R(\tau)| \leq R(0)$. Si noti che queste relazioni valgono anche nel caso in cui il segnale considerato sia a potenza finita.

6.1.1 Trasformata di Fourier della funzione di correlazione

Detta $V(f)$ la trasformata di Fourier del segnale $v(t)$ è possibile calcolare la trasformata della funzione di correlazione. Ricordando infatti che $v^*(-t) \leftrightarrow V^*(f)$ si ha

$$|V(f)|^2 = V(f)V^*(f) \leftrightarrow v(t) * v^*(-t)$$

$$v(t) * v^*(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau)v^*(-t + \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)v^*(t - \tau)dt = R(\tau)$$

dove, nell'ultimo passaggio, sono state scambiate fra di loro la variabile di integrazione τ e la variabile t . Si ottiene quindi:

$$R(\tau) \leftrightarrow |V(f)|^2$$

A questo punto è anche possibile introdurre il concetto di *densità spettrale di potenza* definita come la trasformata di Fourier della funzione di correlazione

$$G(f) = F[R(\tau)]$$

Nel caso di segnali periodici, ad esempio, si ha

$$R(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t)v^*(t - \tau)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |V_n|^2 e^{j2\pi n \frac{\tau}{T_0}}$$

considerando l'espansione in serie di Fourier di $v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_n e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}}$. Si calcola quindi la densità spettrale di potenza

$$G(f) = \sum |V_n|^2 \delta(f - \frac{n}{T_0})$$

che ha lo stesso periodo T_0 di $v(t)$.

6.1.2 Disuguaglianza di Schwartz

Una volta espressa la funzione di autocorrelazione è possibile reinterpretare la disuguaglianza di Schwartz che risulta

$$|\int x(t)y(t)dt|^2 \leq \int |x(t)|^2 dt \int |y(t)|^2 dt$$

$$|R(\tau)|^2 \leq R^2(0)$$

6.2 Rappresentazione geometrica dei segnali

Dato un segnale $v(t)$ può essere interessante scomporlo come somma di contributi dati da una insieme di segnali base $g_i(t)$. Nel caso di $v(t)$ reale, si ha quindi

$$v(t) = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \dots \quad (6.1)$$

Si può poi porre una condizione di ortogonalità fra i segnali base in un certo intervallo (T_1, T_2) e si ha quindi:

$$\int_{T_1}^{T_2} g_i(t)g_j(t)dt = \begin{cases} \text{costante} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

A questo punto è possibile calcolare il coefficiente c_1 che moltiplicando ambo i membri dell'equazione 6.1 risulta pari a:

$$c_1 = \frac{\int_{T_1}^{T_2} v(t)g_1(t)dt}{\int_{T_1}^{T_2} g_1(t)g_1(t)dt}$$

Se infine si impone che le forme d'onda base abbiano energia unitaria (condizione di *ortonormalità*) si ottiene:

$$c_1 = \int_{T_1}^{T_2} v(t)g_1(t)dt$$

In analogia con la rappresentazione geometrica di funzioni, si può dire che le forme d'onda base sono una sorta di vettori.

Si consideri ora un segnale $v(t)$ che sia non nullo solo nell'intervallo (T_1, T_2) lungo T_0 ; la sua versione periodicizzata sia pari a $v_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(t - kT_0)$. A questo punto servendosi della serie di Fourier è possibile scrivere

$$v_p(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos \frac{2\pi nt}{T_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin \frac{2\pi nt}{T_0}$$

in cui ovviamente i segnali in seno e coseno sono ortogonali fra loro e si prestano ad essere considerati come forme d'onda base. Se poi si impone anche la condizione di normalizzazione si ottiene

$$v_p(t) = A\sqrt{T_0} \frac{1}{\sqrt{T_0}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{\sqrt{\frac{2}{T_0}}} \sqrt{\frac{2}{T_0}} \cos \frac{2\pi nt}{T_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{\sqrt{\frac{2}{T_0}}} \sqrt{\frac{2}{T_0}} \sin \frac{2\pi nt}{T_0}$$

in cui le forma d'onda base sono $\frac{1}{\sqrt{T_0}}$, $\sqrt{\frac{2}{T_0}} \cos \frac{2\pi nt}{T_0}$ e $\sqrt{\frac{2}{T_0}} \sin \frac{2\pi nt}{T_0}$.

6.3 Ortogonalizzazione di Gram-Schmitt

Inevitabilmente, un insieme di funzioni base che possa rappresentare in modo completo una funzione arbitraria, è formato da un numero infinito di componenti. Tuttavia è possibile definire un insieme formato da un numero *finito* di funzioni ortogonali che sia completo per la rappresentazione. La procedura di **Gram-Schmitt** descrive come costruire questo insieme di funzioni ortogonali (o ortonormali). Indichiamo i segnali che si vogliono espandere con $s_1(t)$, $s_2(t)$, ..., $s_N(t)$ e le componenti base ortonormali con $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., $u_N(t)$. Date le funzioni $s(t)$, vogliamo determinare le componenti base $u(t)$ e valutare i coefficienti s_{ij} nell'espansione:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_{11}u_1(t) + s_{12}u_2(t) + \dots + s_{1N}u_N(t) \\ s_2(t) &= s_{21}u_1(t) + s_{22}u_2(t) + \dots + s_{2N}u_N(t) \\ &\vdots \\ s_N(t) &= s_{N1}u_1(t) + s_{N2}u_2(t) + \dots + s_{NN}u_N(t) \end{aligned}$$

Ricordiamo che la condizione di ortonormalità è espressa nel modo seguente:

$$\int_{T_1}^{T_2} u_i(t)u_j(t)dt = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j \\ 0 & \text{per } i \neq j \end{cases} \quad (6.2)$$

Il metodo di Gram-Schmitt procede nel modo seguente:

Passo 1. Nella prima equazione poniamo a zero tutti i coefficienti eccetto s_{11} , abbiamo quindi $s_1(t) = s_{11}u_1(t)$. Eleviamo al quadrato entrambi i membri ed integriamo nell'intervallo di interesse, $\int_{T_1}^{T_2} s_1^2(t)dt = s_{11}^2 \int_{T_1}^{T_2} u_1^2(t)dt$, applicando la condizione di ortonormalità otteniamo:

$$s_{11} = \left[\int_{T_1}^{T_2} s_1^2(t)dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.3)$$

e quindi $u_1(t) = \frac{s_1(t)}{s_{11}}$.

Passo 2. Nella seconda equazione poniamo a zero tutti i coefficienti eccetto s_{21} e s_{22} , abbiamo quindi $s_2(t) = s_{21}u_1(t) + s_{22}u_2(t)$. Moltiplichiamo entrambi i membri per $u_1(t)$ ed integriamo nell'intervallo di interesse, $\int_{T_1}^{T_2} s_2(t)u_1(t)dt = s_{21} \int_{T_1}^{T_2} u_1^2(t)dt + s_{22} \int_{T_1}^{T_2} u_2(t)u_1(t)dt$, applicando la condizione di ortonormalità otteniamo:

$$s_{21} = \int_{T_1}^{T_2} s_2(t)u_1(t)dt \quad (6.4)$$

Ora che abbiamo calcolato s_{21} possiamo facilmente determinare s_{22} . Riscriviamo l'equazione di partenza come $s_2(t) - s_{21}u_1(t) = s_{22}u_2(t)$, isolando cioè la parte descritta da $u_2(t)$. Eleviamo ora al quadrato ambo i membri dell'uguaglianza ed integriamo nell'intervallo di interesse, applicando poi la condizione di ortonormalità otteniamo:

$$s_{22} = \left[\int_{T_1}^{T_2} [s_2(t) - s_{21}u_1(t)]^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.5)$$

e quindi $u_2(t) = \frac{s_2(t) - s_{21}u_1(t)}{s_{22}}$.

Passo 3. Continuiamo lo schema riscrivendo la terza equazione nel modo seguente $s_3(t) = s_{31}u_1(t) + s_{32}u_2(t) + s_{33}u_3(t)$. Moltiplicando entrambi i membri, prima per $u_1(t)$ e poi per $u_2(t)$, integrando nell'intervallo di interesse ed applicando la condizione di ortonormalità otteniamo:

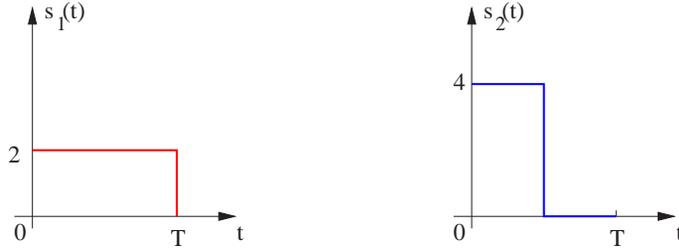
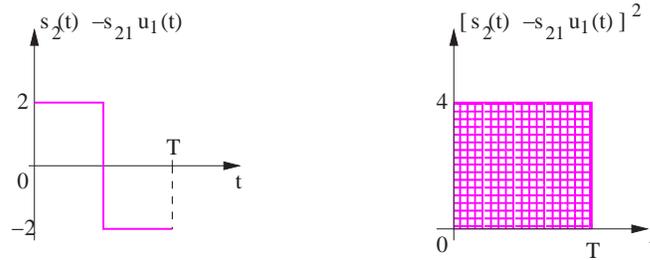
$$s_{31} = \int_{T_1}^{T_2} s_3(t)u_1(t)dt \quad \text{e} \quad s_{32} = \int_{T_1}^{T_2} s_3(t)u_2(t)dt$$

Isoliamo poi nell'equazione di partenza la parte descritta da $u_3(t)$, otteniamo $s_3(t) - s_{31}u_1(t) - s_{32}u_2(t) = s_{33}u_3(t)$. Elevando entrambi i membri dell'uguaglianza al quadrato ed integrando nell'intervallo di interesse si ottiene:

$$s_{33} = \left[\int_{T_1}^{T_2} [s_3(t) - s_{31}u_1(t) - s_{32}u_2(t)]^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

ed infine $u_3(t) = \frac{s_3(t) - s_{31}u_1(t) - s_{32}u_2(t)}{s_{33}}$.

La procedura prosegue fino a quando non siano state usate tutte le N equazioni. Si ottengono infine N funzioni ortonormali $u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)$.

Figura 6.1: Segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ Figura 6.2: Segnali $s_2(t) - s_{21}u_1(t)$ e $[s_2(t) - s_{21}u_1(t)]^2$

6.3.1 Esempio

Le due funzioni $s_1(t)$ e $s_2(t)$ sono rappresentate nella figura 6.1. L'intervallo di interesse si estende tra $t = 0$ e $t = T$. Utilizzando la procedura di Gram-Schmitt vogliamo esprimere queste due funzioni in termini di due componenti base $u_1(t)$ e $u_2(t)$ ortonormali. Applicando l'equazione 6.3 abbiamo che:

$$s_{11} = \left[\int_0^T s_1^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\int_0^T 2^2 dt} = 2\sqrt{T}$$

Sappiamo poi che $u_1(t) = \frac{s_1(t)}{s_{11}} = \frac{s_1(t)}{2\sqrt{T}}$, pertanto tra 0 e T sarà $u_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}$, altrove varrà 0. Analogamente, applicando la formula 6.4 si ottiene che $s_{21} = \int_0^T s_2(t)u_1(t) dt = \int_0^{T/2} 4 \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \right) dt = 2\sqrt{T}$. Le funzioni $s_2(t) - s_{21}u_1(t)$ e $[s_2(t) - s_{21}u_1(t)]^2$ sono rappresentate in figura 6.2. L'area sottesa dalla funzione $[s_2(t) - s_{21}u_1(t)]^2$ è pari a $4T$, pertanto il coefficiente s_{22} come si vede dalla formula 6.5 varrà $s_{22} = 2\sqrt{T}$. A questo punto si può calcolare facilmente $u_2(t) = \frac{s_2(t) - s_{21}u_1(t)}{s_{22}} = \frac{s_2(t) - 2\sqrt{T}u_1(t)}{2\sqrt{T}}$, pertanto si avrà tra 0 e $\frac{T}{2}$, $u_2(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}$ mentre tra $\frac{T}{2}$ e T , $u_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{T}}$. Riassumendo abbiamo:

$$\begin{cases} s_1(t) = 2\sqrt{T}u_1(t) \\ s_2(t) = 2\sqrt{T}u_1(t) + 2\sqrt{T}u_2(t) \end{cases} \quad (6.6)$$

6.4 Corrispondenza tra segnali e vettori.

In questo paragrafo vogliamo mostrare un'analogia tra la rappresentazione di un vettore in termini di componenti ortonormali e la rappresentazione di un segnale in termini di funzioni base ortonormali. Un vettore può essere rappresentato in un sistema di coordinate XYZ. Vengono definiti tre versori i , j e k rispettivamente nelle direzioni X, Y e Z. Essi hanno la proprietà che il prodotto scalare di un versore per

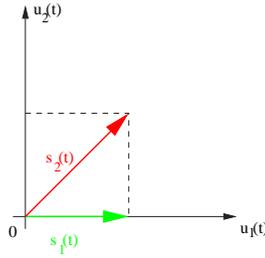


Figura 6.3: Rappresentazione vettoriale dei segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$

sé stesso vale $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$ mentre il prodotto scalare di un versore per un altro versore vale $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$. Si può facilmente notare la corrispondenza con la condizione di ortonormalità:

$$\int_T u_i(t)u_j(t)dt = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j \\ 0 & \text{per } i \neq j \end{cases}$$

Un generico vettore \bar{A} può essere scritto in termini delle sue componenti come $\bar{A} = A_x i + A_y j + A_z k$, analogamente una funzione arbitraria $s(t)$ può essere scritta come $s(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_N u_N(t)$. Se si vuole valutare una componente del vettore, ad esempio A_y , è sufficiente moltiplicarlo per il versore j : $A_y = \bar{A} \cdot j$; allo stesso modo se si vuole valutare, ad esempio, il coefficiente c_2 avrò $c_2 = \int_T s(t)u_2(t)dt$. Inoltre il vettore può essere espresso specificando le sue componenti nelle tre direzioni ortonormali $A = \{A_x, A_y, A_z\}$ così come il segnale $s(t)$ può essere rappresentato indicando le sue componenti nelle N direzioni ortonormali $s(t) = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$. Per concludere l'analogia esposta possiamo considerare che $|\bar{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$ e che l'energia del segnale $s(t)$ vale $E = \int_T s(t)s(t)dt = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_N^2$. Facendo riferimento alla scomposizione 6.6 rappresentiamo i due segnali in un piano (figura 6.3), prendendo come assi cartesiani $u_1(t)$ e $u_2(t)$. Cerchiamo ora di trovare un'altra generica coppia di segnali ortonormali $u'_1(t)$ e $u'_2(t)$ attraverso cui rappresentare i segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$. Scegliamo $u'_1(t)$ come una combinazione lineare delle funzioni base $u_1(t)$ e $u_2(t)$, moltiplichiamo poi questa combinazione lineare per un coefficiente N_1 che ci servirà poi per la normalizzazione. Lo stesso sarà fatto per $u'_2(t)$. Possiamo pertanto scrivere:

$$\begin{aligned} u'_1(t) &= N_1 [u_1(t) + \alpha u_2(t)] \\ u'_2(t) &= N_2 [u_1(t) + \beta u_2(t)] \end{aligned}$$

Vanno ora scelti i coefficienti α , β , N_1 e N_2 affinché valga la condizione di ortonormalità ???. Pertanto avremo:

$$\int_{T_1}^{T_2} u'_1(t)u'_2(t)dt = N_1 N_2 \int_{T_1}^{T_2} [u_1(t) + \alpha u_2(t)][u_1(t) + \beta u_2(t)] dt = N_1 N_2 (1 + \alpha\beta) = 0$$

scegliamo pertanto $\alpha = -1$ e $\beta = 1$. Inoltre dovrà essere:

$$\int_{T_1}^{T_2} u'_1(t)u'_1(t)dt = N_1^2 \int_{T_1}^{T_2} [u_1(t) - u_2(t)]^2 dt = 2N_1^2 = 1$$

e quindi $N_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, analogamente $N_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. A questo punto possiamo scrivere

$$\begin{cases} u'_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [u_1(t) - u_2(t)] \\ u'_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [u_1(t) + u_2(t)] \end{cases}$$

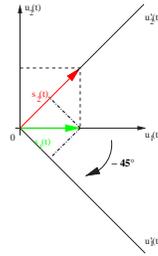


Figura 6.4: Rotazione di 45° delle componenti base

Adottando una notazione matriciale otteniamo:

$$\begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & \sin(-\frac{\pi}{4}) \\ -\sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Attraverso questa possiamo facilmente osservare che le nuove componenti base si ottengono dalle precedenti attraverso una rotazione di 45°, come mostrato nella figura 6.4.

6.5 Trasmissione di segnali numerici

Un argomento di particolare interesse è quello legato alla trasmissione di un segnale da una sorgente numerica ad un ricevitore. Un segnale numerico può essere considerato come una sequenza di bit eventualmente raggruppati a gruppi di potenze di due; ad esempio è possibile ragionare con un segnale composto da una sequenza di coppie di bit: per ogni coppia sono dunque ammissibili quattro valori distinti, quattro simboli (00,01,10,11). La trasmissione del segnale numerico avviene attraverso l'invio nell'etere (o comunque nel mezzo materiale che separa il trasmettitore dal ricevitore) di quattro forme d'onda ognuna indicativa di uno dei quattro simboli di cui sopra; la trasmissione avviene ad intervalli di T secondi.

Sorge quindi la necessità di individuare quattro segnali base che ben si prestino a questo tipo di operazione; la procedura di trasmissione e ricezione, infatti, non è certo esente da errori legati alla cattiva interpretazione dei segnali ricevuti da parte del ricevitore, dovuta eventualmente anche a rumori aggiunti ai segnali durante il passaggio nel mezzo materiale.

In definitiva si cerca di scegliere un set di segnali base che siano massimamente distinguibili l'uno dall'altro di modo da ridurre al minimo le possibilità d'errore; tornando all'esempio una possibile scelta potrebbe essere quella di utilizzare come forme d'onda base due impulsi rettangolari, uno negativo e uno positivo e due rampe, una in salita e una in discesa; alternativamente si potrebbero usare quattro impulsi rettangolari due negativi e due positivi, due di altezza unitaria e due di altezza doppia.

6.5.1 Segnali antipodali, ortogonali e unipodali

Se si considera un intervallo di tempo di ampiezza T e quattro segnali

$$s_i(t) = \sqrt{2P_s} \cos(\omega_0 t + (2i - 1)\frac{\pi}{4}) \quad \text{con } i = 1, 2, 3, 4$$

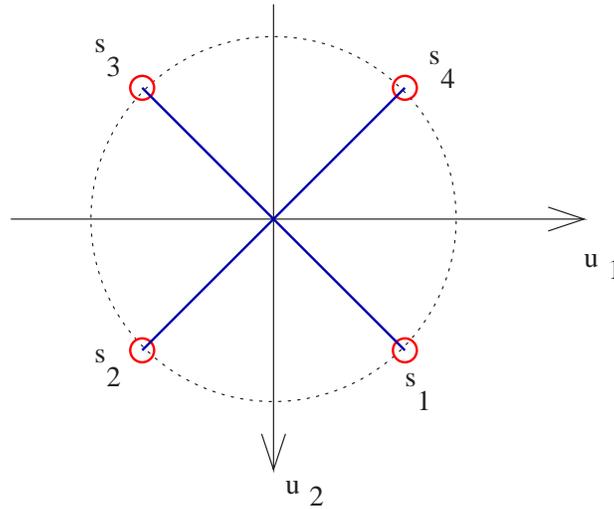


Figura 6.5: Quattro segnali in due coppie antipodali

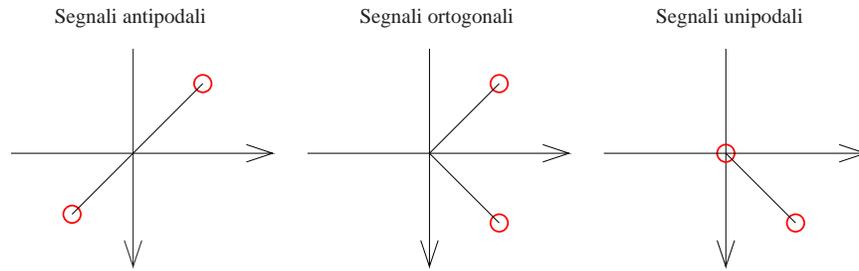


Figura 6.6: Coppie di segnali antipodali, ortogonali e unipodali

che differiscono solo per la fase iniziale, è possibile rappresentarli in uno spazio definito da una base ortonormale e osservare come sono disposti. La potenza media dei quattro segnali $s_i(t)$ è P_s mentre l'energia è $E = P_s T$. Si sceglie la base ortonormale definita dalle due forme d'onda

$$u_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_0 t$$

$$u_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_0 t$$

e si ottiene la disposizione dei quattro segnali mostrata in Figura 6.5; la distanza dei quattro segnali dall'origine degli assi è pari a $\sqrt{E} = \sqrt{P_s T}$ mentre la distanza fra due segnali adiacenti è data da $d = \sqrt{2P_s T}$. I segnali in Figura 6.5 individuano due coppie di segnali *antipodali*; questo tipo di configurazione, insieme a quelle a segnali *ortogonali* e *unipodali*, è mostrato in Figura 6.6. In generale, per la scelta dei segnali da usare per rappresentare i simboli da trasmettere, conviene utilizzare segnali con la stessa energia qualora i simboli siano equiprobabili. Inoltre, a seconda del numero N di simboli, conviene sempre posizionare i segnali in uno spazio a $N - 1$ dimensioni, ottenendo quindi segnali antipodali nel caso di $N = 2$, segnali disposti ai vertici di un triangolo equilatero nel caso di $N = 3$ e segnali posizionati ai vertici di un tetraedro regolare nel caso di $N = 4$. Al limite, per $N \rightarrow +\infty$ vengono scelti segnali tutti perpendicolari fra loro.

Capitolo 7

Entropia e codifica di sorgente

7.1 L'entropia, nella sorgente senza memoria

Consideriamo una sorgente numerica che emetta un messaggio (simbolo) ogni T secondi e lo indichiamo con $S(i)$. L'alfabeto della sorgente, cioè l'insieme dei messaggi che essa può emettere, ha dimensione M ; indichiamo i possibili messaggi con m_i dove $i = 1, \dots, M$. Il nostro scopo è quello di rappresentare le relazioni statistiche tra i messaggi emessi nei vari istanti di tempo. Ipotizziamo che la sorgente emetta dei messaggi *indipendenti* l'uno dall'altro, cioè che sia senza memoria. Possiamo descrivere la sorgente attraverso la probabilità di emissione dei vari messaggi possibili che indichiamo con $p(m_i)$. Ci chiediamo ora qual è l'**informazione** associata ai simboli emessi. Introduciamo il problema attraverso un esempio: supponiamo di avere posto una stazione meteorologica in un deserto, questa sorgente invia il segnale 0 se non piove, mentre invia 1 quando piove. Supponiamo che i messaggi inviati siano indipendenti l'uno dall'altro. Chiaramente, trovandoci in un deserto è prevedibile che le giornate di sole supereranno di gran lunga quelle di pioggia, pertanto la ricezione del segnale 0 non sarà molto significativa, mentre lo sarà quella del segnale 1. Intuitivamente possiamo dire che l'informazione associata ad un dato è legata alla prevedibilità del dato stesso, tanto più un messaggio è improbabile tanta più grande sarà l'informazione in essa contenuto, pertanto l'informazione è inversamente proporzionale alla probabilità di emissione del messaggio. In realtà risulta più conveniente definire l'informazione legata al messaggio i come:

$$I_i = \log_2 \frac{1}{p(m_i)} \quad (7.1)$$

Questa definizione rende molto più semplice valutare l'informazione legata all'emissione di gruppi di simboli. Infatti l'informazione associata alla coppia di messaggi m_i, m_k vale:

$$I_{i,k} = \log_2 \frac{1}{p(m_i, m_k)} = \log_2 \frac{1}{p(m_i)p(m_k)} = I_i + I_j$$

L'informazione associata alla sorgente è data dalla media dell'informazione di tutti i possibili messaggi, viene chiamata **entropia** della sorgente (H) ed è definita come:

$$H = \sum_{i=1}^M p(m_i)I_i = \sum_{i=1}^M p(m_i) \log \frac{1}{p(m_i)} \quad (7.2)$$

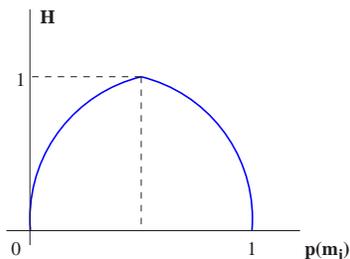


Figura 7.1: Grafico dell'entropia associata a una sorgente che emette due soli simboli

Consideriamo una particolare sorgente che emette solamente i simboli 0 ed 1, vale dunque la relazione $p(0) + p(1) = 1$. L'informazione associata alla sorgente è massima quando i simboli sono equiprobabili, come si può vedere nella figura 7.1. Questo fatto giustifica il nome dato all'informazione associata ad una sorgente. Se i segnali emessi sono confusi, poco prevedibili l'entropia è alta, se sono ordinati ed estremamente prevedibili è bassa. L'entropia risulta essere massima quando la sorgente emette messaggi equiprobabili e vale:

$$H_{max} = \log_2 M \quad (7.3)$$

Consideriamo ora una sequenza di k messaggi, al tendere di k all'infinito nel nostro messaggio composito si troveranno "quasi certamente" $kp(m_1)$ messaggi m_1 , $kp(m_2)$ messaggi m_2 e così via. Quando $k \rightarrow \infty$ il "quasi certamente" diventerà con probabilità 1. In questa condizione tutti gli altri messaggi compositi possono essere trascurati, perché hanno probabilità di emissione 0. I messaggi considerati sono tutti equiprobabili e tenendo conto dell'indipendenza statistica dei messaggi hanno probabilità :

$$p = [p(m_1)]^{kp(m_1)} [p(m_2)]^{kp(m_2)} \dots [p(m_M)]^{kp(m_M)} = \prod_{i=1}^M [p(m_i)]^{kp(m_i)}$$

Il numero dei messaggi considerati è dato da $\frac{1}{p}$. Il numero di cifre binarie necessario a codificare ciascun messaggio composito è dato da $\lg_2 \frac{1}{p}$. Pertanto mediamente per codificare ciascun messaggio elementare saranno necessari

$$\frac{1}{k} \log_2 \left(\frac{1}{p} \right) = -\frac{1}{k} \log_2(p) = -\frac{1}{k} \log_2 \left(\prod_{i=1}^M [p(m_i)]^{kp(m_i)} \right) = \sum_{i=1}^M p(m_i) \log_2 \frac{1}{p(m_i)} \text{ bit}$$

Tale quantità coincide con l'entropia della sorgente, definita nella formula 7.2. Essa rappresenta dunque il limite di cifre binarie a cui si può tendere per rappresentare ciascun messaggio emesso da una sorgente. Questa codifica può venire usata quando i messaggi emessi dalla sorgente sono *equiprobabili* ed *indipendenti*.

7.2 Codifica a lunghezza variabile

Sussistono però procedure approssimate che consentono una codifica efficiente senza dover ricorrere a lunghi blocchi di messaggi e che quindi funzionano bene quando i messaggi emessi dalla sorgente sono indipendenti ma non equiprobabili. Il principio che viene sfruttato è quello dei **codici a lunghezza variabile** cioè codici più corti vengono assegnati ai messaggi più probabili e codici più lunghi a quelli

Messaggio	Probabilità di emissione	Lunghezza fissa	Lunghezza variabile
m_1	0,6	00	0
m_2	0,2	01	10
m_3	0,1	10	110
m_4	0,1	11	111

Tabella 7.1: Esempio di codifica a lunghezza variabile

I ord.	$p(m_i)$	I cifra	II ord.	$p(m_i)$	II c	III ord.	$p(m_i)$	III c
m_1	0,40		m_1	0,40		m_1	0,40	
m_2	0,30		m_2	0,30		m_2	0,30	
m_3	0,20		m_3	0,20		m_3	0,20	0
m_4	0,04		m_{56}	0,06	0	m_{456}	0,10	1
m_5	0,04	0	m_4	0,04	1			
m_6	0,02	1						

Tabella 7.2: Procedura per la codifica di Huffman

meno probabili. Consideriamo ad esempio una sorgente quaternaria che emette i messaggi m_1 , m_2 , m_3 e m_4 in modo *indipendente*. La probabilità di emissione dei singoli messaggi e la loro codifica sia a lunghezza fissa che variabile sono rappresentate nella tabella 7.1. Possiamo osservare che la lunghezza media nella codifica a lunghezza fissa è pari a 2 *bit* mentre in quella a lunghezza variabile risulta essere $1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1 = 1,6$ *bit*. Anche con una codifica a lunghezza variabile deve essere possibile tagliare, in modo non ambiguo, una stringa comunque lunga di bit in una serie di blocchi di bit in modo che ciascuno di essi rappresenti un particolare messaggio. Se ciascun codice non è prefisso di nessun altro codice è possibile effettuare una decodifica istantanea del flusso di bit generato dal codificatore. Questa caratteristica è rispettata dalla codifica a lunghezza variabile utilizzata nell'esempio di tabella 7.1.

7.2.1 Codifica di Huffman.

La generazione di codici a lunghezza variabile, se l'alfabeto della sorgente è grande, può non essere semplice. Illustriamo in questo paragrafo la procedura dovuta a Huffman. I messaggi vengono ordinati secondo probabilità di emissione decrescenti, successivamente i due messaggi di minore probabilità vengono distinti da una prima cifra binaria. I due messaggi vengono poi considerati come un singolo gruppo avente come probabilità la somma delle probabilità, il quale viene inserito al posto appropriato in un secondo ordinamento. La procedura viene reiterata fino alla codifica completa di tutti i messaggi. Nelle tabelle 7.2, 7.3 è mostrato il procedimento di codifica per una sorgente che ha un alfabeto di dimensione 6. Nella tabella 7.4 sono riassunti i codici ottenuti rileggendo a ritroso l'albero ottenuto con la procedura.

Utilizzando la tabella 7.4 si può calcolare la lunghezza media dei codici, $1 \cdot 0,40 +$

IV ord.	$p(m_i)$	IV c	V ord.	$p(m_i)$
m_1	0,40		m_{23456}	0,60
m_2	0,30	0	m_1	0,40
m_{3456}	0,30	1		

Tabella 7.3: Procedura per la codifica di Huffman

Messaggio	Codifica
m_1	1
m_2	00
m_3	010
m_4	0111
m_5	01100
m_6	01101

Tabella 7.4: Codifica di Huffman

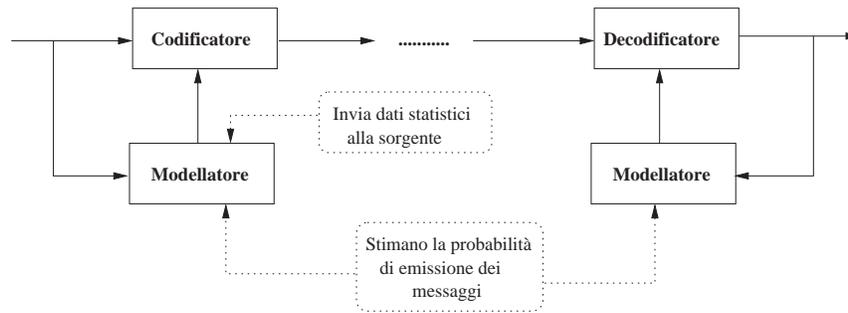


Figura 7.2: Codificatore universali

$2 \cdot 0,30 + 3 \cdot 0,20 + 4 \cdot 0,04 + 5 \cdot 0,04 + 5 \cdot 0,02 = 2,06 \text{ bit}$. Usando una codifica a lunghezza fissa la lunghezza media sarebbe stata invece di circa $2,59 \text{ bit}$.

7.3 I codificatori universali.

Sia per la codifica di Huffman che per altre possibili tecniche (ad esempio la codifica aritmetica), nelle applicazioni pratiche, uno dei principali è legato alla conoscenza delle probabilità di emissione dei possibili simboli. Spesso infatti questa informazione non è disponibile a priori, ma deve essere stimata direttamente dai dati a disposizione. L'approccio spesso utilizzato fa riferimento a quelli che sono chiamati **codificatori universali**. La loro struttura è descritta in figura 7.2. I messaggi in ingresso al codificatore sono inviati anche ad un *modellatore* che a partire dalle frequenze relative dei vari messaggi stima le probabilità di emissione dei simboli stessi e quindi i codici a lunghezza variabile da utilizzare. Inizialmente il codificatore opera con una tabella di probabilità standard. Ad intervalli regolari le probabilità stimate dal modellatore vengono confrontate con quelle utilizzate dal codificatore, qualora siano significativamente diverse, la tabella del codificatore viene aggiornata e quindi vengono ricalcolati i codici. Anche al ricevitore esiste un *modellatore* che opera sui messaggi decodificati. I due modellatori, per garantire la coerenza, operano allo stesso modo. Pertanto la tabella di probabilità e i corrispondenti codici utilizzati dal decodificatore verranno aggiornati con le stesse modalità utilizzate per la codifica. In questo modo si garantisce sia la congruenza tra le modalità operative del codificatore e del decodificatore sia l'adattabilità del sistema di co-decodifica a sorgenti con statistiche diverse.

7.4 L'entropia nella sorgente con memoria.

Consideriamo ora una sorgente i cui messaggi siano emessi in modo *non statisticamente indipendente*. In tal caso non si può più considerare semplicemente la probabilità di emissione di un messaggio $p(m_i)$. Va considerato invece che la probabilità di emissione di un messaggio sia condizionata dai messaggi emessi in precedenza. Chiaramente maggiore è l'intervallo temporale che intercorre tra l'emissione dei messaggi e minore è l'influenza che il primo messaggio ha sul successivi. Pertanto non possiamo considerare le probabilità di emissione $p(m_i)$ ma dobbiamo considerare la probabilità condizionata $p(m_i/S_j)$. Gli m_i rappresentano gli M messaggi che possono essere emessi dalla sorgente, mentre S_j è uno dei possibili stati della sorgente descritto dagli L messaggi precedenti. Assumiamo infatti che la memoria della sorgente si estenda su L messaggi. Chiaramente i possibili stati precedenti sono M^L . L'entropia della sorgente associata allo stato S_j vale

$$H_j = \sum_{i=1}^M p(m_i/S_j) \log_2 \frac{1}{p(m_i/S_j)} \quad (7.4)$$

mediando su tutti i possibili stati otteniamo

$$H = \sum_{j=1}^{M^L} p(S_j) H_j = \sum_{j=1}^{M^L} \sum_{i=1}^M p(S_j) p(m_i/S_j) \log \frac{1}{p(m_i/S_j)} = \sum_{j=1}^{M^L} \sum_{i=1}^M p(m_i, S_j) \log \frac{1}{p(m_i/S_j)} \quad (7.5)$$

Osservando l'equazione 7.5 si capisce facilmente quanto sia complicato il problema relativo al caso di messaggi non indipendenti si faccia rapidamente complicato all'allungarsi della memoria della sorgente. Qualora si vogliano utilizzare anche in questo caso tecniche con codifica alla Huffman a ciascun messaggio m_i non verrà associato un solo codice, ma M^L ottenuti in base alle probabilità $p(m_i/S_j)$. Se le probabilità condizionate di emissione dei simboli vanno stimate direttamente dai dati da codificare, la complessità del sistema può diventare insostenibile per molte applicazioni ed inoltre le stime delle probabilità di emissione potrebbero essere inaffidabili per la scarsità del campione statistico.

Per la codifica dei messaggi emessi dalle sorgenti con memoria si fa normalmente riferimento a quelle tecniche che vanno sotto il nome di **codificatori basati su vocabolario**. Fra le tecniche di questo tipo le più note sono quelle sviluppate da *Zempel* e *Liv*.

7.5 Codifica di Liv-Zempel.

Consideriamo il problema di codificare una serie di caratteri alfanumerici che costituiscono un testo scritto. Volendo codificare singolarmente ciascun carattere sono necessari dai 5 agli 8 bit, a seconda dell'insieme di caratteri che si intendono rappresentare. Fissata la lingua in cui è scritto il testo, la successione dei caratteri non è certamente casuale. Pertanto è molto più conveniente rappresentare ciascuna parola (o gruppo di lettere) con l'indice che la individua in un vocabolario noto sia al codificatore che al decodificatore. Questo perché solo un numero limitato di sequenze di lettere hanno un significato in una determinata lingua. L'approccio più semplice alla codifica basata su vocabolario è mostrata in figura 7.3. I simboli da codificare sono simboli alfanumerici, rappresentati ad esempio da un byte ciascuno. I simboli da codificare alimentano un buffer di ingresso (Caratteri da codificare) di dimensione 16. I caratteri codificati vanno ad alimentare il buffer dei caratteri già

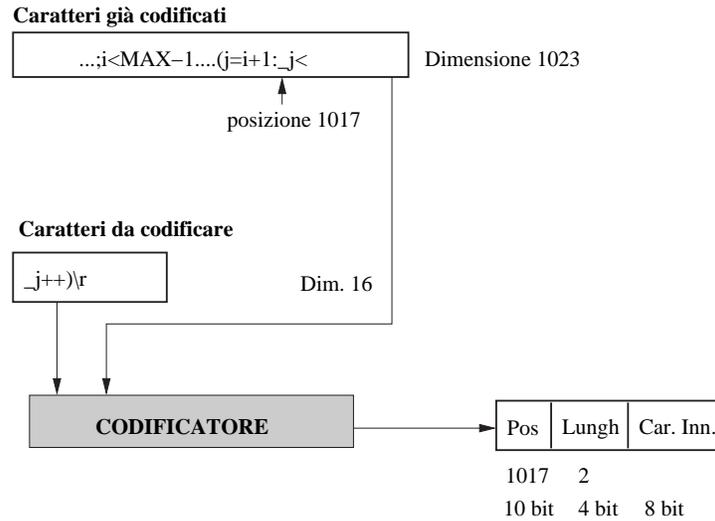


Figura 7.3: Codificatore basato su vocabolario

codificati, la cui dimensione nell'esempio è 1023. Questo buffer costituisce il vocabolario del sistema. Il codificatore cerca a partire dall'inizio del buffer caratteri da codificare la stringa più lunga presente anche nel buffer dei caratteri già codificati. Nella figura 7.3 tale stringa è $_j$. Il codice generato è costituito da due parti:

1. La posizione di inizio della stringa nel buffer dei caratteri già codificati (1017), rappresentata nell'esempio con 10 cifre binarie. Qualora non sia stata individuata nessuna stringa comune fra i due buffer è selezionato il codice 0;
2. La lunghezza della stringa selezionata;
3. Il carattere da codificare che segue la stringa selezionata, chiamato *carattere di innovazione*. Nell'esempio è codificato con 8 bit.

L'introduzione del carattere di innovazione è necessaria in quanto non si ha la sicurezza che i due buffer abbiano una sequenza comune, se questo avvenisse si avrebbe una situazione di stallo. Dopo aver generato in uscita l'insieme dei bit precedentemente indicato la stringa selezionata viene spostata nel buffer dei caratteri codificati.

L'utilizzo del carattere di innovazione, seppur necessario risulta spesso essere molto oneroso. Un possibile modo per superare il problema è quello di utilizzare un bit per identificare il fatto che sia stata trovata una stringa comune fra i due buffer oppure no. In questo modo se esiste la stringa comune si trasmette il bit 1, la posizione iniziale della stringa e la sua lunghezza; se non esiste si trasmette il bit 0 e il carattere di innovazione. In questo modo si aumenta l'efficienza del sistema. Con questa tecnica si tende a ridurre la ridondanza locale della sorgente. Prendiamo ad esempio il caso in cui si voglia codificare il testo di un elenco telefonico. Cognomi uguali si susseguono a breve distanza e questa tecnica può essere utilizzata efficacemente per ridurre questo tipo di ridondanza. Se invece consideriamo il fatto che molte persone abiteranno nella stessa via ma non saranno posizionate vicine nell'elenco telefonico questa tecnica non può risolvere il problema. Possiamo cercare di risolvere questo problema utilizzando un vocabolario più sofisticato rispetto a quello contenente solamente gli ultimi simboli codificati. Consideriamo ora

Vocabolario iniziale	
Indice	Vocabolo
0	“ “ (stringa vuota)

Tabella 7.5: Vocabolario iniziale

Stringa codificata	Vocabolo utilizzato	Carattere innovazione
“D“	0	'D'
“A“	0	'A'
“D_“	1	'_'
“DA“	1	'A'
“DA_“	4	'_'

Tabella 7.6: Codifica della stringa DAD_DADA_DADDY_DADO_

il seguente testo da codificare DAD_DADA_DADDY_DADO_.... Inizialmente il vocabolario conterrà solamente la stringa vuota, come rappresentato nella tabella 7.5. La codifica procede come mostrato nella tabella 7.6 e nel contempo evolve anche il vocabolario (vedi tabella 7.7). Quando viene raggiunta la dimensione massima del vocabolario bisognerà implementare una strategia di sostituzione dei vocaboli, cancellando ad esempio i vocaboli più corti oppure i meno recenti o ancora i meno utilizzati. Anche in questo caso l'uso del carattere di innovazione risulta però molto oneroso.

Per effettuare l'efficienza della codifica è possibile organizzarla in modo che il carattere di innovazione relativo ad una certa stringa non sia rappresentato direttamente ma come inizio della stringa successiva. Inoltre si può pensare che all'inizio del processo il vocabolario contenga già il numero minimo di vocaboli necessari a garantire il funzionamento del sistema. Ad esempio potrebbero essere già presenti 256 vocaboli che corrispondono ad ognuna dei simboli elementari della codifica ASCII estesa. Supponiamo ad esempio che il testo da codificare sia _WED_WE_WEE_WEB_WET. La codifica è mostrata nella tabella 7.8. L'unica avvertenza da seguire in questo approccio è quella di non utilizzare immediatamente l'ultimo vocabolo inserito, poiché esso sarà noto al decodificatore solamente al ciclo successivo. In questo modo funzionano la maggior parte delle tecniche di compressioni dati (ad esempio PKZIP).

7.6 Ridondanza di sorgente.

Definiamo la ridondanza di una sorgente come:

$$R = 1 - \frac{H}{H_{max}}$$

Indice	Vocabolo
0	“ “
1	“D“
2	“A“
3	“D_“
4	“DA“
5	“DA_“

Tabella 7.7: Evoluzione del vocabolario

Stringa codificata	Vocabolo utilizzato	Carattere innovazione	Nuovo vocabolo
“_W”	‘_’	‘W’	“_W” cod. 256
“WE”	‘W’	‘E’	“WE” cod. 257
“ED”	‘E’	‘D’	“ED” cod 258
“D_”	‘D’	‘_’	“D_” cod 259
“_WE”	256	‘E’	“_WE” cod 260

Tabella 7.8: Codifica della stringa _WED_WE_WEE_WEB_WET

dove H è l’entropia della sorgente mentre l’entropia massima è quella definita nella formula 7.3 e rappresenta il numero di bit utilizzati per rappresentare i simboli elementari con codici a lunghezza fissa.

7.7 Codificatori di sorgente e irrilevanza

I meccanismi descritti nei paragrafi precedenti, in grado di codificare i segnali emessi da una sorgente numerica al fine di trasmettere il minor numero possibile di *bit*, vengono generalmente indicati come *codificatori di sorgente*. Essi si dividono in due categorie principali.

Codificatori lossless Si tratta di codificatori caratterizzati da tassi di compressione poco spinti e dall’assoluta assenza di perdite; sono infatti detti anche *codificatori senza perdite* perché il processo di codifica non provoca la perdita di informazione alcuna. Si basano principalmente sulla stima che i sistemi possono fare della distribuzione statistica della sorgente (ad esempio si pensi alle strategie di gestione e mantenimento del vocabolario).

Codificatori loss Si tratta di codificatori che permettono tassi di compressione elevati a scapito della perdita di alcune informazioni durante il processo di codifica; sono infatti detti anche *codificatori con perdite*.

Va notato che non sempre la completa assenza di perdite è assolutamente necessaria; si consideri per esempio la situazione in cui occorra trasmettere un segnale vocale: l’utente finale, ossia chi riceve il segnale, non è interessato al fatto che la forma d’onda sia esattamente identica a quella presente alla sorgente. L’utente finale, al contrario, è interessato a determinate caratteristiche di qualità del segnale che permettano di comprendere il messaggio vocale del segnale e magari capire chi parla.

E’ possibile individuare in un segnale alcune informazioni non strettamente necessarie e che vengono in parte eliminate dai codificatori di categoria *loss*; questi dati potenzialmente superflui si dividono in *ridondanti* e *irrilevanti*. La ridondanza è una caratteristica propria del segnale considerato mentre l’irrilevanza dipende dallo specifico utente interessato al segnale o comunque dall’ambito in cui il segnale si colloca; per meglio comprendere questo concetto, si consideri il segnale che porta il video della ripresa TV di un telegiornale: le informazioni rilevanti sono l’audio ed eventualmente i movimenti del viso dell’annunciatore, mentre piccoli cambiamenti dello sfondo (eventualmente dovuti a rumore presente nelle immagini) sono totalmente irrilevanti per l’utente finale. Oppure si considerino le preview di foto presenti su molte pagine Internet: oltre un certo livello di qualità delle immagini, si portano esclusivamente dati irrilevanti dato che per immagini mostrate così piccole non è necessaria una qualità esagerata.

Capitolo 8

Trattamento segnali audio

Esistono alcune tecniche per eliminare i dati irrilevanti da un segnale audio; di seguito vengono quindi mostrati dei codificatori che permettano di ridurre il numero di *bit* necessari per la trasmissione, cercando di non pregiudicare la qualità del segnale trattato.

8.1 Riduzione dell'irrelevanza dei segnali vocali

8.1.1 Sistemi DPCM e ADPCM

Si consideri un segnale $s(t)$ che viene poi campionato con periodo di campionamento T . La procedura di codifica vista finora prevederebbe le fasi di campionamento, quantizzazione e codifica a partire dal segnale $s(t)$ e questa, in realtà, è già di per sé in piccola parte con perdita dato che per la codifica viene comunque utilizzato un numero finito di *bit*. Ora, invece, una volta ottenuti i campioni $S(n)$ si decide di quantizzare la differenza fra campioni successivi, $S(n) - S(n - 1)$. A tal scopo si assume che i campioni siano caratterizzati da una densità di probabilità delle ampiezze di tipo gaussiano con varianza σ_s^2 ; inoltre si considera una sorgente di dati stazionaria ossia tale che la distribuzione di probabilità dei campioni non vari nel tempo.

I requisiti sul rumore di quantizzazione impongono dei limiti sull'ampiezza Δ dei livelli di quantizzazione che risulta quindi fissata. Resta da definire l'escursione massima delle ampiezze da considerare. A tal scopo è necessario ricordare che per le note proprietà della distribuzione gaussiana, la probabilità che un campione $S(n)$ abbia ampiezza che cade fuori dell'intervallo $(-3\sigma_s, 3\sigma_s)$ è molto bassa; si sceglie dunque di trascurare (e quindi troncare) tutte le ampiezze che cadono fuori da tale intervallo, compiendo un errore che risulta comunque molto piccolo. Si ha quindi

$$M = \frac{6\sigma_s}{\Delta}$$

da cui, considerando che $M = 2^N$, si ricava facilmente il numero di *bit* N necessario per la codifica del segnale da trasmettere.

Il processo di codifica di $d(n) = S(n) - S(n - 1)$, differenza fra due campioni successivi, genera inoltre un cambiamento della varianza:

$$\sigma_d^2 = E[(S(n) - S(n - 1))^2] = E[S(n)^2] + E[S(n - 1)^2] - 2E[S(n)S(n - 1)]$$

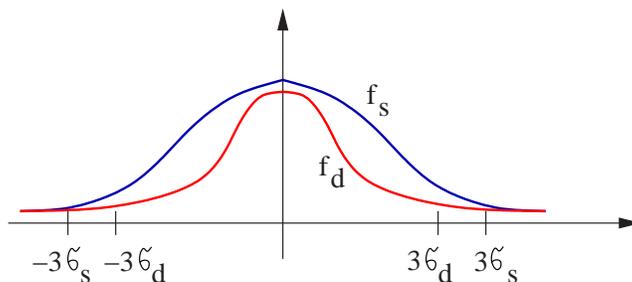


Figura 8.1: Densità di probabilità delle ampiezze di $S(n)$ e $d(n)$

e per le caratteristiche di stazionarietà dei campioni $S(n)$

$$\sigma_d^2 = \sigma_s^2 + \sigma_s^2 - 2E[S(n)S(n-1)] = 2\sigma_s^2(1 - \rho)$$

dove $\rho = \frac{E[S(n)S(n-1)]}{\sigma_s^2}$ è il coefficiente di correlazione fra $S(n)$ e $S(n-1)$.

Al variare della correlazione fra i campioni varia quindi la varianza σ_d^2 ; in particolare possono essere individuati tre casi limite:

$\rho = 1$ I campioni sono completamente correlati ossia ogni singolo campione dipende completamente dai precedenti e di conseguenza la varianza risultante è nulla.

$\rho = 0$ I campioni sono completamente scorrelati uno dall'altro e di conseguenza la varianza risultante è pari al doppio di quella dei campioni singoli.

$\rho = -1$ Significa che la presenza di un campione $S(n)$ con ampiezza $+a$ implica che con buona probabilità il successivo avrà ampiezza $-a$; la varianza risultante è pari a quattro volte quella dei singoli campioni.

Tipicamente il valore di ρ è prossimo ad 1 e quindi la varianza della differenza fra due campioni successivi è minore di quella del singolo campione.

Se si analizza la densità di probabilità delle ampiezze di $d(n)$ mostrata in Figura 8.1 assieme a quella di $S(n)$ si nota facilmente come dinamica di $d(n)$ risulti molto più ristretta. Codificando la differenza fra campioni successivi è possibile quindi utilizzare un numero inferiore di *bit*. In fase di decodifica, per la ricostruzione del campione attuale del segnale originale si procede attraverso la somma del campione al passo precedente con la differenza appena ricevuta.

Il principale limite all'utilizzo della tecnica appena descritta è legato all'inevitabile disallineamento che si viene a creare fra il lato codifica e il lato decodifica; da quest'ultima parte, infatti, ci si basa sui campioni ricostruiti e non su quelli originali e questo provoca un continuo aumento degli errori. Per ovviare a questo problema si utilizza un sistema come quello mostrato in Figura 8.2. Attraverso l'utilizzo di un predittore, sia al lato codifica sia al lato decodifica vengono usate le stesse informazioni, ossia $\tilde{S}(n)$, i campioni predetti. Per quanto riguarda la realizzazione del predittore, vi sono diverse possibili implementazioni; la scelta più semplice è quella di utilizzare un ritardo pari a T , per cui si avrebbe

$$\tilde{S}(n) = \hat{S}(n-1)$$

tuttavia una versione meno rozza e più attendibile è quella in cui vengono considerati K campioni precedenti pesati in modo differente

$$\tilde{S}(n) = \sum_{i=1}^K a_i \hat{S}(n-i)$$

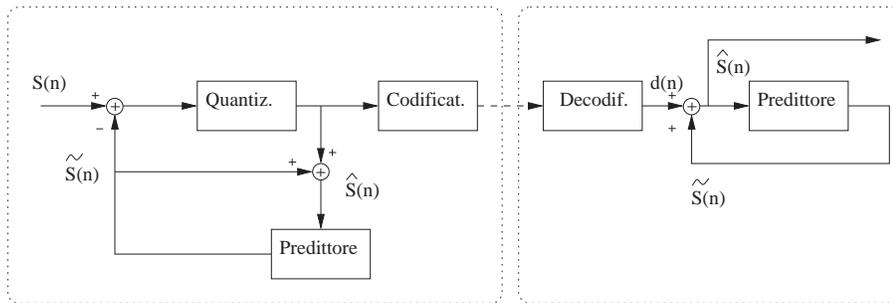


Figura 8.2: Sistema DPCM

Così facendo il sistema risulta completamente definito e prende il nome di *sistema DPCM (Differential Pulse Code Modulation)*. Il quantizzatore utilizzato col DPCM lavora a 6 o 7 *bit* e di conseguenza produce un flusso di dati di 16 o 32 *Kbit/s* significativamente minore rispetto ai 64 *Kbit/s* del sistema PCM classico; per quanto riguarda la qualità del segnale risultante, nel caso di applicazioni a segnali vocali, le differenze rispetto a quanto prodotto da un sistema PCM non sono percepibili ad orecchio.

Un possibile raffinamento del sistema DPCM si ha attraverso il continuo aggiornamento dei coefficienti a_i della formula del predittore; per fare ciò si utilizza un sistema adattativo che stima i parametri ottimi in ogni momento. Il codificatore/decodificatore risultante è detto *ADPCM (Adaptive Differential Pulse Code Modulation)*. Infine è possibile migliorare ulteriormente i risultati ottenuti intervenendo in tempo reale anche sul periodo di campionamento T (ad esempio nel caso i livelli di quantizzazione si mantengano costanti per un certo periodo di tempo).

8.1.2 Sistemi Delta-Modulation e ADM

Al fine di ridurre al minimo il numero di *bit* necessari per la trasmissione e decodifica di un messaggio, l'ideale sarebbe poter utilizzare un quantizzatore che lavori ad un singolo *bit* e un predittore che si limiti a svolgere una funzione di puro ritardo. Per poter implementare con successo un sistema di questo tipo occorre però aumentare significativamente la frequenza di campionamento.

Si utilizza quindi la strategia di inviare una singola informazione di un *bit* per ogni campione; viene specificato se il campione attuale è maggiore o minore in ampiezza del precedente e viene di conseguenza trasmesso un $+\Delta$ o un $-\Delta$.

Sistemi di questo tipo, caratterizzati da un bit rate variabile fra i 10 e i 16 *Kbit/s*, si dicono *sistemi DM (Delta Modulation)*.

I sistemi *Delta Modulation* sono soggetti tuttavia a due classi di errori piuttosto rilevanti.

Sovraccarico di pendenza Questo difetto si ha quando il segnale da codificare cresce più rapidamente di quanto possa fare la stima ottenuta dalla continua somma di elementi $+\Delta$; il segnale inviato e poi decodificato non rispecchia in modo sufficientemente fedele quello originale. Questa situazione di errore è mostrata in rosso in Figura 8.3, dove si considera nulla la stima iniziale utilizzata al primo passo per stabilire se inviare $+\Delta$ o $-\Delta$.

Rumore granulare Questo difetto si ha quando il segnale da codificare si discosta di poco dalla stima e di conseguenza si ha un susseguirsi di correzioni $+\Delta$ e $-\Delta$

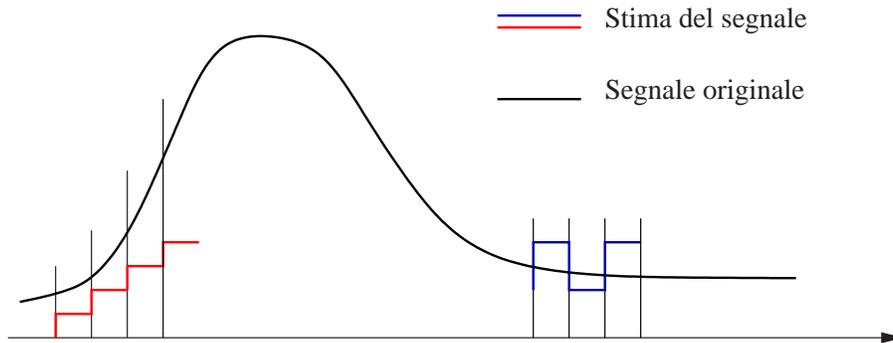


Figura 8.3: Errori di codifica per sistemi Delta Modulation

che generano un rumore in realtà assente nel segnale originale. Questa situazione è mostrata in blu in Figura 8.3.

Per ovviare ai problemi appena descritti, sono stati introdotti i *sistemi ADM* (*Adaptive Delta Modulation*) nei quali l'ampiezza di Δ viene modificata durante il processo di codifica: per ridurre l'incidenza del sovraccarico di pendenza il sistema provvede ad aumentare Δ qualora per più istanti consecutivi sia necessario inviare Δ con lo stesso segno; al contrario Δ viene ridotto qualora vi sia una serie di passi caratterizzati da una continua alternanza di segni più e meno, riducendo quindi l'incidenza del rumore granulare.

8.1.3 Modellazione del meccanismo di generazione dei suoni

Un approccio per ridurre l'irrelevanza completamente differente rispetto alle tecniche *DPCM* e *DM* è quello di modellare il meccanismo di generazione dei segnali vocali di modo da poter poi scegliere al meglio il numero di *bit* necessario per la quantizzazione e codifica del segnale considerato. A tal scopo occorrerà considerare i parametri che descriveranno il modello che essenzialmente descrive il funzionamento del segnale di pressione generato dai polmoni umani, del tubo acustico e delle labbra.

Innanzitutto occorre tenere presente che i segnali vocali possono essenzialmente essere divisi in *segnali vocalizzati* (*vocali e testo cantato*) e *segnali non vocalizzati* (*consonanti*). I primi risultano essere quasi periodici e di conseguenza la loro trasformata di Fourier è abbastanza simile a quella di un seno, caratterizzata da sequenza di picchi e valli in rapida successione; il picco massimo di ogni sequenza porta le informazioni sulla vocale in questione (*portante*). I suoni non vocalizzati, invece, sono generati da impulsi di pressione prodotti dai polmoni; in seguito attraverso l'interazione del tubo acustico, che comprende anche le corde vocali e si assume formato da una decina di tratti di ampiezza diversa, viene modulato il suono desiderato.

Detto questo il modello da considerare prevede un filtro che simuli le funzioni del tubo acustico e che abbia in ingresso impulsi sommati a segnali relativamente costanti che si possono assumere come una sorta di rumore. Si sceglie di considerare tale filtro come un filtro a tutti poli la cui posizione dipende dalla distanza fra tratti consecutivi del tubo stesso.

Per tornare all'eccitazione iniziale in ingresso al filtro e ottenere una sorta di sbiancatura del processo, si inserisce poi in cascata al primo un secondo filtro costituito

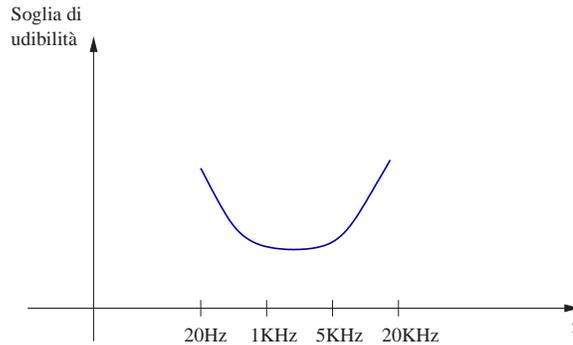


Figura 8.4: Soglia di udibilità

però da tutti zeri. Di conseguenza il modulo della trasformata di Fourier della funzione di trasferimento complessiva risulta essere pressoché costante.

Tarando correttamente i parametri del modello appena descritto (le posizioni degli zeri e poli, ad esempio), si riesce in seguito ad ottenere *bit rate* che spaziano da valori anche inferiori a 1 *Kbit/s* fino a 15 *Kbit/s*.

Applicazioni tipiche di tecniche come questa sono quelle legate alla telefonia mobile per le quali lo standard *CELP* prevede un *bitrate* di 13 *Kbit/s* o, nel caso dei telefoni cellulari di seconda generazione (*Dual Band*), 6.5 *Kbit/s*.

8.2 Riduzione dell'irrelevanza di segnali musicali

I segnali musicali vengono tipicamente trattati in maniera differente rispetto a quelli esclusivamente vocali; tipicamente sono campionati a frequenze di 44.1 *kHz* o 48 *kHz* e quantizzati e codificati a 16 o 24 *bit* per campione. Occorre ricordare poi che l'orecchio umano non è in grado di percepire componenti di segnali audio fuori dalla banda che si estende fra i 20 *Hz* e i 20 *kHz*.

Inoltre l'orecchio umano non è uniformemente sensibile a tutte le componenti dei segnali che cadono nella banda dell'udibile ed è possibile quindi definire una soglia di udibilità dei segnali in funzione della frequenza; tale soglia è mostrata in Figura 8.4. Come si può notare facilmente, le componenti di segnali che vengono udite più facilmente sono quelle frequenze comprese fra i 1000 e i 5000 *Hz*.

Si intuisce facilmente dall'andamento della soglia di udibilità che è possibile quantizzare rozzamente le componenti di segnali che cadano nelle bande fra 20 e 1000 *Hz* e fra 5 e 20 *kHz*. In definitiva quindi i segnali vengono suddivisi in bande e su ognuna di esse viene applicata una codifica di tipo *DPCM* o *ADPCM* con un numero di *bit* per la quantizzazione variabile in funzione della significatività della banda considerata.

Un secondo limite dell'udito umano sta nell'impossibilità di percepire correttamente due suoni contemporanei di ampiezza differente: solo il suono ad ampiezza maggiore viene infatti percepito. Questo effetto è detto di *mascheramento dinamico* ed è mostrato in Figura 8.5 dove si considera la presenza di una componente di segnale ad ampiezza elevata a frequenza f_0 . Si può quindi risparmiare *bit* in fase di quantizzazione per le frequenze appena prima e appena dopo f_0 .

In Figura 8.6 è rappresentato uno schema a blocchi dell'effettiva implementazione del processo di quantizzazione e codifica di un segnale musicale; questa tecnica

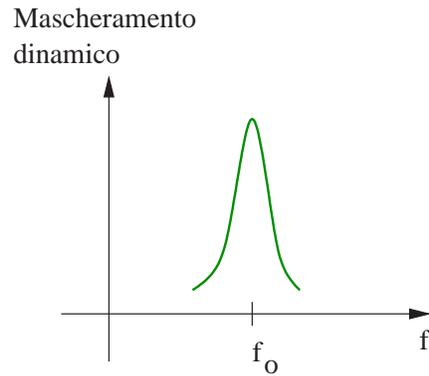


Figura 8.5: Mascheramento dinamico

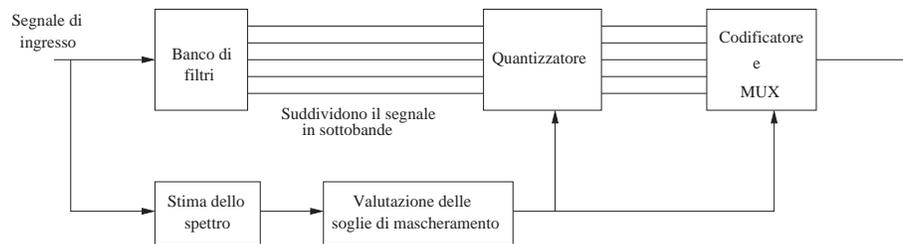


Figura 8.6: Schema quantizzazione e codifica segnale musicale

(utilizzata ad esempio per il noto *MP3 Mpeg 2 Layer III*) permette di ottenere *bitrate* compresi fra 32 e 192 *Kbit/s*; tipicamente si hanno flussi di dati di 64 *Kbit/s* per canale audio.

Capitolo 9

Trattamento immagini e segnali video

9.1 Descrizione dei segnali video

Una delle applicazioni pratiche più comuni ed importanti delle comunicazioni elettriche sono i segnali video televisivi. Perché un segnale video sia definito occorre che siano trasmesse le informazioni riguardanti ogni singolo punto dell'immagine che viene visualizzato in seguito sui nostri teleschermi; per fare ciò si immagini di dover memorizzare i valori di una funzione $I(x, y, t, \lambda)$ che esprime l'intensità luminosa; tale funzione dipende ovviamente dalle coordinate cartesiane del punto, dall'istante di tempo considerato e dalla lunghezza d'onda corrispondente al colore da visualizzare (si ricorda che il campo delle lunghezze d'onda del visivo va da 400nm a 700nm).

In realtà, poi, invece di $I(x, y, t, \lambda)$ si considerano tre funzioni distinte che forniscono la potenza ottica di un certo punto in un determinato istante di tempo in una banda centrata nelle lunghezze d'onda del rosso, verde e blu. Si ha quindi:

- $R(x, y, t)$ per il rosso
- $G(x, y, t)$ per il verde
- $B(x, y, t)$ per il blu

La rappresentazione in forma numerica di questi tre segnali permette di fornire tutte le informazioni necessarie alla visualizzazione del segnale televisivo. Per quanto riguarda il campionamento, tale operazione per la coordinata temporale corrisponde a prendere le informazioni solo in istanti di tempo separati da un certo intervallo, mentre per le coordinate spaziali corrisponde a considerare un unico valore per un quadrato di piccole dimensioni invece che per un punto (che teoricamente è infinitamente piccolo).

Nel caso del segnale televisivo PAL in uso in Europa (esclusa la Francia) i campionamenti appena descritti si traducono nella pratica in immagini a 25 fps composte da 576 righe per 720 colonne e codificate a 8 bit per quanto riguarda i colori. Di conseguenza il bit rate per il flusso di informazioni del segnale PAL sarebbe pari a 240Mbit/s o equivalentemente 30MByte/s.

Poiché non è certo agevole trasmettere quantità così ingenti di informazioni, sono stati presi degli accorgimenti al fine di risparmiare sui bit della codifica e vengono quindi utilizzate tre nuove funzioni

- $Y = aR + bG + cB$
- $C_R = R - Y$
- $C_B = B - Y$

dove a , b e c sono dei coefficienti tali per cui Y rappresenta l'intensità luminosa senza informazioni sul colore della radiazione. L'utilizzo di queste tre funzioni permette di ridurre il bit rate a 160Mbit/s o equivalentemente 20MByte/s. valore che rappresenta dunque l'indice di deterioramento del segnale a causa della quantizzazione.

Si ricordi inoltre che è necessario trasmettere pochi *bit* per le informazioni riguardanti la sincronia delle immagini.

9.2 Riduzione dell'irrelevanza spaziale

Nel capitolo 7 è stato introdotto il concetto di irrilevanza; viene ora mostrato come sia possibile ridurre l'irrelevanza spaziale nelle immagini e di conseguenza anche nei segnali video.

Prima di tutto occorre considerare che il cervello umano percepisce maggiormente le informazioni di luminanza delle immagini piuttosto che quelle di cromaticità; perciò le informazioni riguardanti i colori possono essere quantizzate in modo più rozzo. Si sceglie quindi di analizzare principalmente la componente di luminanza dei segnali.

Analogamente a quanto detto a proposito delle tecniche *DPCM* e *ADPCM*, è possibile risparmiare *bit* in fase di quantizzazione considerando la differenza fra due campioni successivi. Nel caso di un'immagine fissa equivale a fare la differenza di luminosità fra due pixel adiacenti.

Si ottiene una nuova immagine differenza in cui ogni singolo pixel assume tonalità più o meno chiara a seconda della differenza di luminosità col pixel precedente nell'immagine originale: se le due luminosità sono uguali si sceglie convenzionalmente di rappresentare un pixel grigio, mentre in nero si rappresenta la massima differenza negativa e in bianco quella positiva.

In Figura 9.1 si nota facilmente come la quantità di informazioni sia maggiormente concentrata nel caso si considerino le differenze di luminosità fra pixel vicini; ne segue che in questo modo è possibile utilizzare meno bit per la quantizzazione (5-6 *bit* per campione).

9.2.1 Trasformata DCT (Discrete Cosine Transform) e standard ISO-JPEG

La trasformata DCT si introduce con l'obiettivo di avere solo coefficienti reali che descrivono il segnale da trasformare, a differenza della serie di Fourier classica che genera coefficienti dotati anche di parte immaginaria. Attraverso questa trasformata un segnale può essere scomposto in tante componenti tutte cosinusoidali con la stessa fase iniziale.

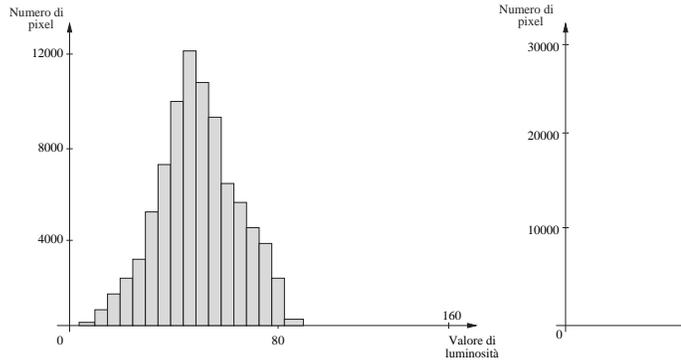


Figura 9.1: Istogrammi dei valori di luminanza, e delle differenze tra queste.

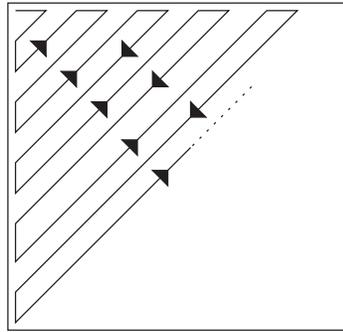


Figura 9.2: Percorrenza della matrice dei coefficienti della trasformata DCT

Per comodità per la quantizzazione di un segnale video si considerano blocchetti di 8×8 pixel ciascuno; ad ognuno di essi viene applicata la trasformata DCT di modo da ottenere una matrice di 8×8 coefficienti reali. Tali coefficienti sono associati alle componenti (segnali base) alle varie frequenze che compongono il segnale originale; andando da sinistra a destra e dall'alto verso il basso della matrice si incontrano le ampiezze delle componenti a frequenze sempre più alte; ovviamente il primo coefficiente in alto a sinistra corrisponde alla parte continua. Oltre una certa frequenza i coefficienti assumono valori molto piccoli e vengono quindi trascurati (quantizzazione con perdita).

La matrice risultante viene poi codificata percorrendola a *zig-zag* (vedi Figura 9.2) e arrestandosi quando si incontra un coefficiente nullo, dato che esso indica che da quel punto in avanti le frequenze del segnale trasformato sono state trascurate.

In Figura 9.3 è mostrato l'intero processo di codifica di un'immagine statica appena descritto; esso prende il nome di standard *ISO-JPEG* (*Join Picture Expert Group*).

Questa tecnica consente di codificare ogni pixel con pochi bit, mediamente anche

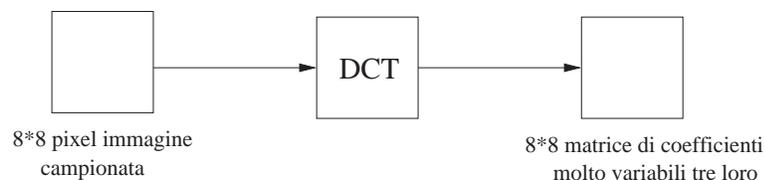


Figura 9.3: Standard di codifica ISO-JPEG

meno di uno; tuttavia così facendo si rischia di perdere molto in qualità nel caso di immagini particolarmente piccole; non è infatti assicurata la continuità fra un blocco e i suoi vicini e la perdita di qualità si evidenzia nella comparsa di blocchi visibili ad occhio nudo nell'immagine.

9.2.2 Scomposizione Wavelet

La principale limitazione derivante dall'utilizzo della trasformata DCT e di conseguenza dello standard JPEG è legata al trattamento troppo locale delle immagini; viene infatti applicata la DCT a singoli blocchi da 8×8 pixel senza tener conto di quelli adiacenti. Il problema si evidenzia maggiormente nel caso si scenda sotto 0.5 bpp (*bit per pixel*). Sembrerebbe interessante poter applicare una trasformata simile alla DCT all'intera immagine considerata. I pixel di un'immagine forniscono informazioni di localizzazione spaziale, mentre le informazioni ottenute in seguito all'applicazione di una trasformata (Fourier, DCT) sono legate alla localizzazione in frequenza. Per ottenere una codifica ottimale servirebbe cogliere entrambi gli aspetti di localizzazione. Esistono trasformate più complesse di quelle viste finora che si servono di funzioni base localizzate contemporaneamente nello spazio e in frequenza; una di queste è la *scomposizione Wavelet*. Scomponendo iterativamente l'immagine considerata attraverso filtri passa-basso e passa-alto si ottiene una matrice di $n \times n$ coefficienti. Essi sono disposti in modo tale che nella regione in alto a sinistra vi siano le componenti prodotte dal filtro passa-basso e maggiormente localizzate in frequenza; tali componenti contengono la maggior parte dell'informazione. Nelle restanti zone vi sono le informazioni di dettaglio che rappresentano le componenti localizzate nello spazio, suddivise in orizzontali (in basso a sinistra), verticali (in alto a destra) e oblique (in basso a destra). Per ciascuna zona della matrice vengono pertanto utilizzate strategie di codifica differenti (ad esempio utilizzando più bit per la parte in alto a sinistra e meno per quelle di dettaglio). L'applicazione della scomposizione Wavelet dà origine allo standard di codifica *JPEG2000*, tuttora in fase di sviluppo.

Si noti tuttavia che per valori superiori ad 1 bpp la codifica ISO-JPEG fornisce attualmente risultati migliori rispetto alla JPEG2000 poiché ha un adattamento molto forte alle caratteristiche locali delle immagini.

Per maggiori dettagli e raffronti visivi sulla scomposizione Wavelet si rimanda alle dispense [2].

9.3 Riduzione dell'irrelevanza temporale

Quanto detto nei paragrafi precedente riguarda la riduzione dell'**irrelevanza spaziale** del segnale; nel caso di immagini in movimento occorre considerare anche l'**irrelevanza temporale**. Qualora vi sia poca differenza fra due fotogrammi successivi (situazione tipica) molte informazioni portate dalla seconda immagine sono già presenti nella prima; si decide perciò di considerare la differenza punto a punto fra i due fotogrammi, mettendo in atto una sorta di tecnica *DPCM* temporale. Analogamente a quanto detto nel caso dell'irrelevanza spaziale, l'immagine risultante sarà completamente grigia in tutti i punti che non cambiano da un frame all'altro, conterrà in nero i particolari presenti nella prima immagine e assenti nella seconda mentre quelli nuovi saranno presenti in bianco.

Si possono poi applicare tecniche di previsione degli spostamenti di parti delle immagini; l'ipotesi più semplice è supporre che un singolo particolare non cambi passando

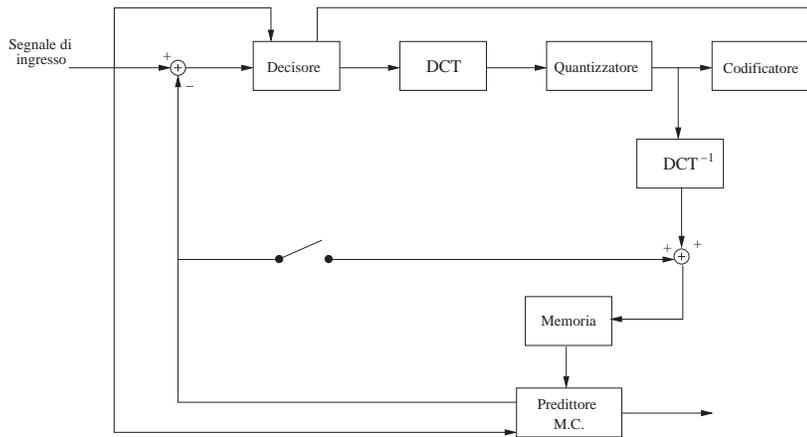


Figura 9.4: Codificatore ibrido

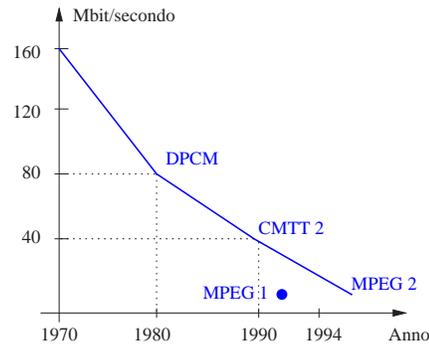


Figura 9.5: Evoluzione degli standard di codifica

da un frame all'altro. Se questo caso non corrisponde a verità si procede ricercando nell'immagine precedente un pattern simile a quello considerato correntemente che evidentemente sarà quello che ha subito lo spostamento. Questa tecnica è detta *differenza a moto compensato (Motion Compensation)*.

Così facendo si ottiene il *codificatore ibrido* che riduce contemporaneamente l'irrelevanza spaziale e quella temporale ed è mostrato in Figura 9.4. Si noti la presenza di un blocco di decisione che viene utilizzato per scegliere se una data immagine debba essere codificata staticamente o come differenza rispetto a quella precedente; tale accorgimento risulta utile per resettare il sistema di codifica e ridurre l'incidenza di eventuali errori.

9.4 Standard di codifica

In Figura 9.5 è mostrata l'evoluzione negli anni delle tecniche di compressione di segnali video; si noti che il *CMTT-2* è il primo standard di codifica ibrida, caratterizzato da un flusso fra i 30 e i 40 *Mbit/s* e qualità elevata adatta ad applicazioni professionali. Per quanto concerne le caratteristiche delle altre tecniche, lo standard *MPEG1* prevede un bitrate di 1 *Mbit/s* (di modo da consentire la riproduzione di filmati da lettori CD standard) ed è adatto ad applicazioni *consumer* poiché offre una qualità paragonabile a quella di una VHS. *MPEG2*, invece, si presta ad un utilizzo più professionale permettendo di lavorare con bitrate compresi fra 1 e 40

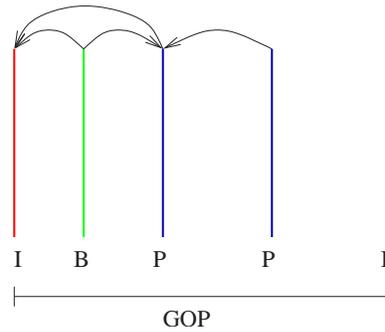


Figura 9.6: GOP della codifica MPEG

Mbit/s a seconda delle esigenze di qualità; applicazioni tipiche di questo standard sono i DVD e le trasmissioni via satellite.

E' da notare poi che solo le codifiche *MPEG1* e *MPEG2* sono state pensate sia per la trasmissione di dati sia per la loro memorizzazione, mentre le precedenti tecniche erano ottimizzate solo per la trasmissione. Poiché tutte le tecniche di codifica considerate sono di tipo differenziale, non permettono l'accesso casuale alle immagini. Per ovviare a questo problema gli standard *MPEG* codificano periodicamente dei fotogrammi senza fare riferimento a frame precedenti. Tali immagini sono dette *fotogrammi chiave* e sono indicati in Figura 9.6 con I; i fotogrammi P, invece, sono frame derivati facendo riferimento unicamente ad una direzione temporale; i frame B, infine, sono ricavati utilizzando informazioni sia passate sia future. Il flusso video è composto di numerosi blocchi di fotogrammi I,P e B detti *GOP (Group of pictures)*; ogni GOP è tipicamente composto da 12 o 24 immagini. Il passo con cui si può accedere casualmente ad un filmato corrisponde alla dimensione dei GOP, quindi per un segnale PAL l'accesso casuale può avvenire al massimo ogni mezzo secondo circa. La realizzazione di ogni singolo GOP avviene attraverso la codifica e trasmissione prima dei fotogrammi I, poi di quelli P ed infine dei B.

Capitolo 10

Analisi statistica dei segnali

Consideriamo una sorgente che possa emettere due possibili messaggi m_0 e m_1 (che possono rappresentare, ad esempio, rispettivamente 0 ed 1). In una situazione ideale di assenza di errori il messaggio m_0 genera in ricezione r_0 , il messaggio m_1 genera r_1 . Spesso però a causa di rumore si hanno degli errori e a fronte della spedizione del messaggio m_0 viene ricevuto r_1 e in modo corrispondente pur avendo spedito m_1 si riceve r_0 . Assumeremo, in generale, che la probabilità di un errore sia dipendente da quale messaggio viene spedito ed introduciamo le seguenti probabilità condizionate chiamate *probabilità di transizione*:

$$\begin{aligned} P(r_0|m_0) &= \text{probabilità di ricevere } r_0 \text{ avendo spedito } m_0 \\ P(r_1|m_0) &= \text{probabilità di ricevere } r_1 \text{ avendo spedito } m_0 \\ P(r_0|m_1) &= \text{probabilità di ricevere } r_0 \text{ avendo spedito } m_1 \\ P(r_1|m_1) &= \text{probabilità di ricevere } r_1 \text{ avendo spedito } m_1 \end{aligned}$$

In sintesi il canale trasmissivo è descritto dalle probabilità condizionate $P(m_i|r_j)$ con $i, j \in [0, 1]$. Indichiamo poi con $P(m_0)$ e $P(m_1)$ la probabilità della sorgente di emettere il segnale m_0 e m_1 nell'intervallo di osservazione, queste probabilità sono definite *a priori*. La situazione appena definita è rappresentata nella Figura 10.1. Dopo aver osservato in ricezione un messaggio r_0 o r_1 ci chiediamo come sia possibile stabilire con certezza quale messaggio era stato spedito.

Supponiamo di aver ricevuto r_0 , dobbiamo ora considerare le seguenti probabilità condizionali, dette *a posteriori*:

$$\begin{aligned} P(m_0|r_0) &= \text{probabilità di avere spedito } m_0 \text{ avendo ricevuto } r_0 \\ P(m_1|r_0) &= \text{probabilità di avere spedito } m_1 \text{ avendo ricevuto } r_0 \end{aligned}$$

Chiaramente se:

- $P(m_0|r_0) > P(m_1|r_0)$ si decide per m_0 ;

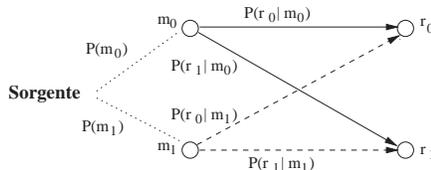


Figura 10.1: Sistema di comunicazione a due messaggi

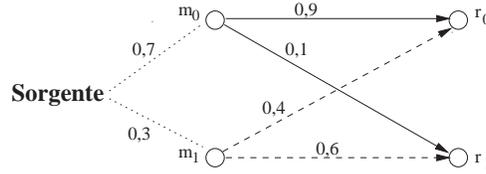


Figura 10.2: Sistema di comunicazione, sono rappresentate le probabilità a priori e di transizione

- $P(m_1|r_0) > P(m_0|r_0)$ si decide per m_1 ;

Se i due membri dell'uguaglianza hanno lo stesso valore si può decidere arbitrariamente per m_0 oppure per m_1 . Questo algoritmo di decisione è definito di massimizzazione della probabilità a posteriori (*MAP Maximum A-posteriori probability*). L'algoritmo può essere espresso in termini di probabilità di transizione e di probabilità a priori. Partiamo ad esempio dall'equazione $P(m_0|r_0) > P(m_1|r_0)$ e moltiplichiamo entrambi i membri per $P(m_0)$, abbiamo come risultato che se viene ricevuto r_0 si potrà dire che il messaggio di partenza era m_0 se:

$$P(m_0|r_0)P(m_0) > P(m_1|r_0)P(m_1) \quad (10.1)$$

applicando il **teorema di Bayes**¹ all'equazione 10.1 possiamo scrivere:

$$P(r_0|m_0)P(m_0) > P(r_0|m_1)P(m_1) \quad (10.2)$$

Analogamente se si riceve r_1 possiamo dire che il messaggio inviato era m_1 se è soddisfatta la seguente disequazione:

$$P(r_1|m_1)P(m_1) > P(r_1|m_0)P(m_0) \quad (10.3)$$

Esempio 1 Applichiamo questo algoritmo al caso rappresentato Figura 10.2 in cui $P(m_0) = 0,7$, $P(m_1) = 0,3$, $P(r_0|m_0) = 0,9$, $P(r_1|m_0) = 0,1$, $P(r_0|m_1) = 0,4$ e $P(r_1|m_1) = 0,6$.

Riceviamo il messaggio r_0 , posso decidere che l'informazione di partenza era m_0 se vale l'equazione 10.2 cioè se $(0,9)(0,7) > (0,4)(0,6)$. La disequazione è verificata, quindi il messaggio di partenza era m_0 . Supponiamo ora di ricevere r_1 , decidiamo per m_1 se vale l'equazione 10.3 cioè se $(0,6)(0,3) > (0,1)(0,7)$. La disequazione è verificata, la nostra decisione è quindi m_1 .

Se modifichiamo le probabilità a priori ponendo $P(m_0) = 0,9$ e $P(m_1) = 0,1$; l'algoritmo, indipendentemente dalla ricezione di r_0 oppure r_1 , decide che il simbolo di partenza era m_0

Esempio 2 Consideriamo questa nuova situazione, rappresentata in Figura 10.3. I simboli emessi dalla sorgente sono sempre m_0 e m_1 , quelli che si hanno in ricezione, a causa del rumore, sono invece r_0 , r_1 e r_2 . Riceviamo il messaggio r_0 : impostando la disequazione 10.2 abbiamo $(0,6)(0,6) > (0,4)(0,4)$ pertanto decidiamo per m_0 . Riceviamo il simbolo r_1 : impostando la disequazione 10.3 abbiamo $(0,3)(0,4) > (0,2)(0,6)$, i due termini sono uguali, quindi decidiamo arbitrariamente per m_1 , la probabilità di errore è la stessa. Riceviamo il messaggio r_2 , decideremo per m_1 se è

¹Teorema di Bayes: ricordiamo che nella forma più semplice può essere espresso con la formula $P(A, B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$

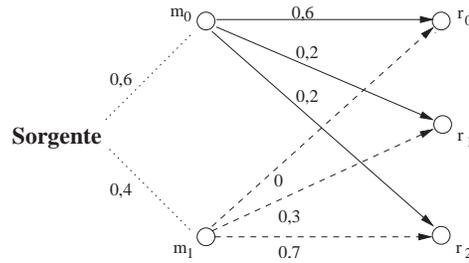


Figura 10.3: Sistema di comunicazione, sono rappresentate le probabilità a priori e di transizione



Figura 10.4: Sistema binario di trasmissione

verificata la disequazione $P(r_2|m_1)P(m_1) > P(r_2|m_0)P(m_0)$. Ipostandola abbiamo $(0,7)(0,4) > (0,2)(0,6)$, è verificata quindi decidiamo per m_1 .

Calcoliamo ora la probabilità globale di errore, che indichiamo con $P(\varepsilon)$. Indicando con $P(c)$ la probabilità di determinare in modo corretto il simbolo che era stato trasmesso posso scrivere $P(\varepsilon) = 1 - P(c)$. Determiniamo quindi $P(c)$:

$$P(c) = P(r_0|m_0)P(m_0) + P(r_1|m_1)P(m_1) + P(r_2|m_1)P(m_1)$$

nel nostro caso abbiamo $P(c) = (0,6)(0,6) + (0,3)(0,4) + (0,7)(0,4) = 0,76$, pertanto $P(\varepsilon) = 1 - P(c) = 0,24$.

Osserviamo che in questo algoritmo hanno un peso molto rilevante le informazioni sulla probabilità di emissione della sorgente, che devono essere note a priori. Se questo non fosse vero e le informazioni fossero mancante si stabilisce che le probabilità di emissione siano uguali, cioè che $P(m_0) = P(m_1) = \frac{1}{2}$. Si parla in questo caso di *decisione a massima verosimiglianza*.

Continuiamo a trattare una situazione simile a quella vista sopra, ipotizziamo però di avere la seguente situazione: il sistema di trasmissione è caratterizzato dal fatto che il trasmettitore emette messaggi appartenenti ad un alfabeto di dimensioni finite, nel nostro caso la trasmissione è binaria e i messaggi sono 1 e 0, mentre i simboli che si hanno in ricezione possono assumere *infiniti* valori. La situazione è schematizzata nel diagramma a blocchi di Figura 10.4. In uscita dal generatore di forme d'onda si hanno i seguenti segnali

$$m(n) = \begin{cases} 0 & \rightarrow s_0(t) & s_0(t - nT) \\ 1 & \rightarrow s_1(t) & s_1(t - nT) \end{cases}$$

Schematizziamo ora più in dettaglio il sistema di ricezione, rappresentato in Figura 10.5. Il blocco di sincronizzazione permette di porre rimedio ad un inevitabile ritardo che si deve scontare in trasmissione. Il blocco di decisione, su cui ci concentreremo, deve decidere se il segnale letto ad un certo istante di tempo rappresenta un 1 o uno zero. Ci chiediamo prima di tutto che cosa ci interessi rappresentare del segnale in ingresso al ricevitore $s(nT)$. Se non avessi nessun disturbo esso assumerebbe i valori v_0 (corrispondente al fatto che sia stato trasmesso 0) e v_1 (corrispondente al fatto che sia stato trasmesso 1). Se si sommano delle componenti di disturbo, che indichiamo con $n(nT)$, abbiamo $s(nT) = v_i(nT) + n(nT)$. Il nostro

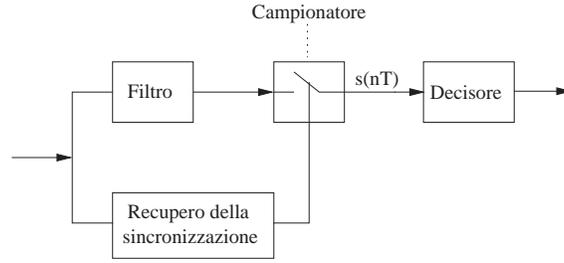


Figura 10.5: Sistema di ricezione

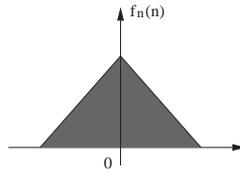
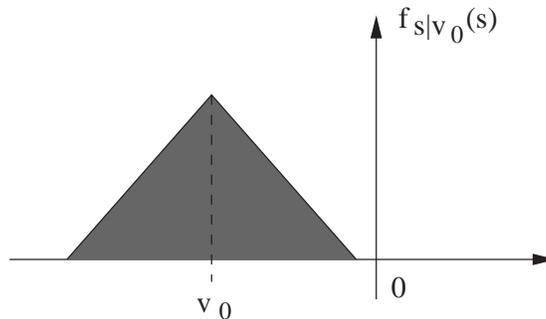


Figura 10.6: Densità di probabilità delle ampiezze dell'errore

sistema dovrà fissare una soglia nei valori di $s(nT)$ in modo da poter decidere, con un'adeguata strategia, quale valore è stato trasmesso.

Le informazioni statistiche di cui possiamo disporre sono le probabilità a priori, che come abbiamo visto in precedenza, rappresentano la probabilità di avere trasmesso 0 o 1 e che indichiamo con $p(m_0)$ e $p(m_1)$. L'errore n può invece essere visto come una variabile aleatoria a media nulla, la cui densità di probabilità delle ampiezze, che ovviamente avrà area unitaria è rappresentata in Figura 10.6. Gli errori in diversi istanti di tempo sono indipendenti e identicamente distribuiti. Ovviamente anche il segnale in ingresso al decisore $s(nT)$ sarà una variabile aleatoria, di cui non ci interessa conoscere la densità di probabilità. Tale segnale avrà una parte deterministica che vale v_0 o v_1 . Consideriamo quindi come densità di probabilità $f_{s|v_0}(s)$ e $f_{s|v_1}(s)$, la prima di queste densità è rappresentata nella Figura 10.7, la seconda è analoga ma centrata in v_1 . Se supponiamo che il decisore abbia letto in ricezione un valore preciso s allora esso deve valutare una probabilità infinitesima. Pertanto consideriamo equivalente al caso trattato sopra in cui veniva ricevuto un simbolo r_0 o r_1 , il fatto che il decisore abbia ricevuto un segnale s tale che $\tilde{s} \leq s \leq \tilde{s} + \Delta s$. Valutiamo dunque la seguente probabilità

$$P(\tilde{s} \leq s \leq \tilde{s} + \Delta s | v_0) = f_{s|v_0}(\tilde{s}) = f_n(\tilde{s} - v_0) \Delta s$$

Figura 10.7: Densità di probabilità di $f_{s|v_0}(s)$

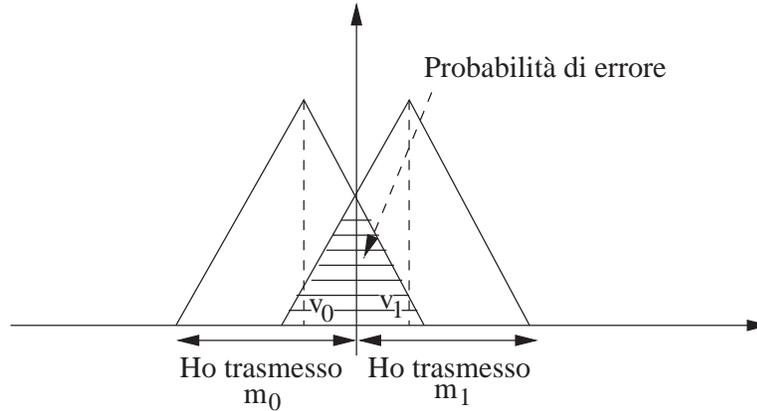


Figura 10.8: Soglia di decisione

che rappresenta la probabilità di aver ricevuto s dato che è stato trasmesso v_0 . Pertanto deciderò che è stato trasmesso m_0 quando vale la seguente relazione

$$f_n(\tilde{s} - v_0)p(m_0) > f_n(\tilde{s} - v_1)p(m_1)$$

La zona in cui la disequazione è soddisfatta, supponendo che le due probabilità di emissione siano uguali $p(m_0) = P(m_1) = \frac{1}{2}$ è mostrata in Figura 10.8. La soglia di decisione in tal caso è posta a $\frac{v_0 + v_1}{2}$. Se le due *probabilità a priori* hanno valori diversi, ad esempio $p(m_0) = 0,3$ e $p(m_1) = 0,7$, la disequazione va impostata di conseguenza, in questo particolare esempio avremo $0,3f_n(\tilde{s} - v_0) > 0,7f_n(\tilde{s} - v_1)$.

La probabilità globale di errore $P(\varepsilon)$, rappresentata in Figura 10.8, è data da

$$P(\varepsilon) = P(\tilde{s} < soglia|m_1)P(m_1) + P(\tilde{s} > soglia|m_0)P(m_0)$$

Solitamente l'errore viene rappresentato mediante una variabile aleatoria gaussiana continua a media m_n e varianza σ^2 . In questo caso la densità di probabilità delle ampiezza ha la seguente espressione $f_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(n-m_n)^2}{2\sigma^2}}$ (rappresentata gratuitamente con la ben nota campana). In questo caso la probabilità $P(N > s)$ è esprimibile nel modo seguente

$$P(N > s) = 1 - P(N \leq s) = 1 - F_N(s) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{s - m_n}{\sqrt{2\sigma^2}} \right)$$

dove *erfc* rappresenta l'*error function complementare*.

10.1 Processi casuali (aleatori)

Un processo aleatorio può essere definito come la rappresentazione in termini statistici di segnali variabili nel tempo. Più precisamente, ad ogni evento elementare w , appartenente allo spazio campione, viene associata una funzione nel tempo $X(w, t)$ e non un numero reale, come nel caso delle variabili aleatorie. Ad esempio dati una pila da 1,5 V, una pila da 6 V ed un oscillatore da 3 V a 1 kHz se si pesca a caso uno dei tre oggetti e se ne misura la tensione ai morsetti si ottiene uno dei tre andamenti temporali (realizzazioni) in figura 10.9. Pertanto l'insieme di queste realizzazioni congiuntamente con le probabilità con cui esse possono essere scelte rappresenta un

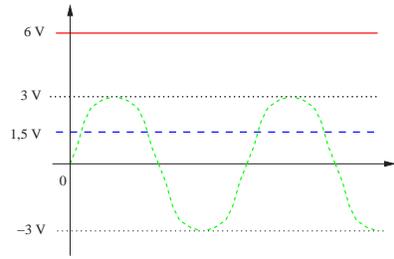


Figura 10.9: Realizzazioni di un processo casuale

processo aleatorio; w individua la realizzazione prescelta e t scandisce ciascuna realizzazione. In particolare fissato un particolare istante t di osservazione il processo aleatorio si riduce ad una variabile aleatoria, mentre fissato w e quindi la realizzazione il processo casuale si riduce ad una funzione del tempo. Nella notazione comune il processo aleatorio $X(t, w)$ è indicato con $X(t)$.

Un altro possibile esempio da considerare è il seguente: ai capi di una resistenza di valore R , non collegata con altri bipoli e posta alla temperatura T è presente una tensione variabile dovuta all'agitazione casuale degli elettroni. Considerando resistenze diverse (sempre di valore R ed alla temperatura T) si osservano tensioni diverse. L'insieme di questi andamenti di tensione (realizzazioni) rappresentano un processo stocastico. Campionando tale processo si ottiene la variabile aleatoria $X(t_0, w)$.

10.1.1 Descrizione statistica di un processo aleatorio

La descrizione statistica di un processo casuale è data dalla descrizione statistica congiunta delle variabili aleatorie $X(t_1, w), \dots, X(t_N, w)$ con N grande a piacere e per ogni possibile scelta dell'insieme di valori t_1, \dots, t_N . In altre parole deve essere nota, per ogni N

$$P[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_N) \leq x_N] = F_X(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

F_X prende il nome di distribuzione di probabilità di ordine N associata al processo aleatorio $X(t)$. In questo modo il processo aleatorio viene a coincidere con un insieme di N variabili aleatorie. In particolare possiamo definire:

- distribuzione di ordine 1: $F_X(x_1; t_1) = P[X(t_1) \leq x_1]$
- distribuzione di ordine 2: $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2]$

10.1.2 Descrizione statistica di ordine 1

- *Media* del processo $m_X(t) = E[X(t)]$ è una funzione monodimensionale del tempo, varia istante per istante;
- *Potenza statistica* (valore quadratico medio) del processo $M_X(t) = E[|X(t)|^2]$;
- *Varianza* del processo $\sigma^2 = E[|X(t) - m_X(t)|^2]$

Osserviamo che tutti questi parametri sono segnali di tipo deterministico, li definiamo descrizione statistica di ordine 1 del processo poiché coinvolgono una sola variabile casuale ottenuta campionando il processo aleatorio in un determinato istante di tempo t . Sono momenti statistici di ordine 1 e 2.

Più in dettaglio la media di un processo casuale può essere scritta come $m_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x; t) dx$.

10.1.3 Descrizione statistica di ordine 2

- *Correlazione* del processo $R_X(t, s) = E[X(t)X(s)^*]$ è una funzione bidimensionale;
- *Covarianza* $K_X(t, s) = E[(X(t) - m_X(t))(X(s) - m_X(s))]$

Osserviamo che $R_X(t, t) = E[X(t)X(t)^*] = E[|X(t)|^2] = M_X(t)$. Più in dettaglio la correlazione di un processo casuale può essere scritta come:

$$R_X(t, s) = E[X(t)X(s)^*] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2^* f_{XX}(x_1, x_2; t, s) dx_1 dx_2$$

dove $f_{XX}(x_1, x_2; t, s)$ è la densità di probabilità congiunta relativa alla coppia di variabili ottenuta osservando il processo agli istanti t ed s .

Indichiamo la *correlazione incrociata* tra 2 processi casuali $X(t)$ e $Y(t)$ come $R_{XY}(t, s) = E[X(t)Y(s)^*]$ (ovviamente è significativo l'ordine con cui vengono considerati i processi). Due processi aleatori sono incorrelati quando la correlazione incrociata è pari al prodotto delle medie, ovvero quando la covarianza incrociata è nulla.

10.1.4 Stazionarietà

Il concetto di stazionarietà di un processo aleatorio coincide con l'invarianza nel tempo della statistica del processo stesso.

Consideriamo ad esempio la tensione di rumore V di una resistenza. La statistica dei campioni del rumore non cambia nel tempo (se non cambia la temperatura a cui viene tenuta la resistenza): $V(t)$ e $V(t + \tau)$ sono due variabili aleatorie distinte ma con uguale distribuzione. $V(t)$ e $V(t + \tau)$ hanno una distribuzione statistica congiunta che è la stessa della coppia $V(t + t_0)$ e $V(t + t_0 + \tau)$.

Formalmente definiamo la traslazione nel tempo come: $X_{t_0}(t) = X(t - t_0)$. La descrizione statistica completa di $X_{t_0}(t)$ è

$$F_{X_{t_0}}(x_1, x_2, \dots, x_N; t_1, t_2, \dots, t_N) = P[X(t_1 - t_0) \leq x_1, X(t_2 - t_0) \leq x_2, \dots, X(t_N - t_0) \leq x_N] = F_X(x_1, \dots, x_N; t_1 - t_0, \dots, t_N - t_0)$$

Quindi nota la descrizione statistica di X è nota anche quella di una qualunque sua traslazione. Ora si può dare una definizione più precisa di stazionarietà. Un processo aleatorio $X(t)$ è stazionario in un certo parametro statistico se $X_{t_0}(t)$ e $X(t)$ hanno lo stesso parametro statistico per ogni t_0 . Ad esempio un processo aleatorio si può dire stazionario in media se la media del processo è costante $m_X(t) = m_X(t - t_0) = \text{cost}$, un processo si definisce stazionario in correlazione se la funzione di correlazione dipende solo dalla differenza temporale tra i due istanti considerati e non dai due istanti stessi cioè se $R_X(t + \tau) = R_{X_{t_0}}(t + \tau) = R_X(\tau)$. Un processo viene detto **stazionario in senso lato** se risulta stazionario in media e correlazione. Un processo è detto **stazionario in senso stretto** quando è stazionaria ogni sua possibile descrizione statistica. Se un processo è gaussiano se qualunque insieme di N campioni del processo con N qualsiasi costituisce un vettore aleatorio gaussiano (insieme di variabili aleatorie congiuntamente gaussiane). Un processo aleatorio gaussiano stazionario in senso stretto è stazionario anche in senso lato.

Per quanto riguarda i processi stazionari, almeno in senso lato, si può dimostrare facilmente che la funzione di correlazione, che può essere scritta come $R_X(t, s) = R_X(t, t + \tau) = E[X(t)X(t + \tau)^*]$ gode delle seguenti proprietà :

- $R_X(0) = M_X \geq 0$;
- $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$ per ogni τ ;
- $R_X(\tau) = R_X(-\tau)^*$

Se il processo è reale la funzione di correlazione è pari $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$.

Per i processi stazionari almeno in senso lato la **densità spettrale di potenza** viene definita come la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione $F(R_X(\tau)) = S_X(f)$ e gode della seguente proprietà $S_X(f) \geq 0$.

Esempio Si calcoli media, correlazione, e densità spettrale del processo aleatorio $X(t) = V_0 \exp[j(2\pi f_0 t + \phi)]$ con V_0 variabile aleatoria complessa e ϕ variabile aleatoria, indipendente da V_0 ed uniformemente distribuita tra $-\pi$ e π .

$$m_X(t) = E[V_0 \exp[j(2\pi f_0 t + \phi)]] = E[V_0]E[\exp[j(2\pi f_0 t + \phi)]] = E[V_0] \int_{-\pi}^{+\pi} \exp[j(2\pi f_0 t + \phi)] \frac{1}{2\pi} d\phi = 0$$

$$R_X(t, t + \tau) = E[V_0 \exp[j(2\pi f_0 t + \phi)] V_0^* \exp[-j(2\pi f_0 (t + \tau) + \phi)]] = E[|V_0|^2] E[\exp[-j2\pi f_0 \tau]]$$

X è stazionario in media e correlazione è quindi stazionario in senso lato. Pertanto $R_X(0) = M_X = E[|V_0|^2]$

La densità spettrale di potenza è data da $S_X(f) = F(R_X(\tau)) = E[|V_0|^2] \delta(f - f_0)$.

Se un processo $X(t)$ è stazionario almeno in senso lato e la sua densità spettrale di potenza $S_X(f)$ non ha un impulso ideale nell'origine allora esso ha media nulla. Supponiamo infatti *per assurdo* che $m_X \neq 0$; il processo aleatorio $Y(t)$ definito nel modo seguente $Y(t) = X(t) - m_X$ ed anch'esso stazionario almeno in senso lato, avrebbe pertanto una funzione di autocorrelazione pari a $R_Y(\tau) = R_X(\tau) - |m_X|^2$ e quindi una densità spettrale di potenza $S_Y(f) = F(R_Y(\tau)) = S_X(f) - |m_X|^2 \delta(f)$. Il risultato ottenuto è una contraddizione poiché la densità spettrale di potenza di processi stazionari almeno in senso lato è definita positiva $S_Y(f) \geq 0$.

Da ciò si desume che per un processo stazionario $X(t)$ almeno stazionario in senso lato qualora non vi siano impulsi per $f = 0$ nella densità spettrale di potenza $S_X(f)$ si ha che la media del processo casuale è nulla $m_X = 0$.

10.2 Processi casuali e sistemi lineari

Abbiamo visto nella sezione 2.4 che i sistemi tempo-invarianti continui sono caratterizzati dal seguente legame ingresso-uscita

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau$$

dove in questo caso $x(t)$ e $y(t)$ rappresentano due segnali deterministici. Possiamo però considerare $x(t)$ come un processo aleatorio. In questo caso $y(t)$ diventerà un processo stocastico. Fissate le caratteristiche statistiche di $x(t)$ quali saranno quelle di $y(t)$?

Media Se il processo $X(t)$ ha media $m_X(t)$ allora $Y(t)$ avrà media $m_Y(t) = g(t) * m_X(t)$ (con $*$ indichiamo l'operazione di convoluzione). In particolare se $X(t)$ è stazionario in media $m_X(t) = m_X$ allora anche $Y(t)$ sarà stazionario in media e si avrà $m_Y = m_X H(0)$, $H(0)$ è la trasformata di Fourier di $h(t)$ valutata a frequenza nulla.

Correlazione

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= E[Y(t_1)Y(t_2)^*] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} Y(t_1)X(\alpha)^*h(t_2 - \alpha)^*d\alpha\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{YX}(t_1, \alpha)h(t_2 - \alpha) = h(t_1) * R_X(t_1, t_2) * h(t_2)^* \end{aligned}$$

Da queste relazioni si può desumere come il passaggio attraverso un sistema lineare mantenga la stazionarietà in senso lato. Infatti per quanto riguarda la media si è visto che se essa non dipende dal tempo per il processo in ingresso anche la media del processo in uscita sarà indipendente dal tempo. Per quanto riguarda la correlazione nel caso che il processo in ingresso $X(t)$ sia stazionario possiamo porre $t_2 - t_1 = \alpha$ ed ottenere quindi

$$R_Y(\tau) = h(-\tau)^* * R_X(\tau) * h(\tau)$$

Densità spettrale di potenza Per quanto riguarda le densità spettrali di potenza abbiamo che $h(-\tau)^* * h(\tau) \xleftrightarrow{F} |H(f)|^2$ e pertanto

$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2$$

La densità spettrale di potenza descrive come si divide statisticamente la potenza alle singole frequenze quando si considerano tutte le realizzazioni di un processo, una delle densità spettrali usate più comunemente è quella di tipo bianco, si ha cioè che $S_X(f)$ è pari ad una costante, che indichiamo con $\frac{\eta}{2}$. Tale densità può essere usata sotto l'ipotesi che essa sia valida nell'intervallo di frequenza di interesse e che tenda a zero altrove in modo che la potenza statistica risulti finita.

Va ricordato inoltre che se il processo di ingresso $X(t)$ è gaussiano, lo sarà anche il processo di uscita. Possiamo infatti pensare il processo di uscita come somma di infinite repliche del processo di ingresso opportunamente scalate e ritardate e sappiamo che la somma di variabili e di processi gaussiani è ancora gaussiana.

10.3 Processi casuali discreti

Così come i segnali deterministici anche i processi stocastici possono essere classificati come continui o discreti. Per i processi discreti la variabile temporale può assumere solo valori discreti $(-2T, -T, 0, T, 2T)$. l'insieme di questi intervalli temporali è "indirizzato" attraverso una variabile intera. Anche per questi processi possiamo definire la media $m_X(nT)$ che indichiamo con $m_X(n)$ a patto di lavorare con una variabile normalizzata. Definiamo poi la funzione di correlazione (o di autocorrelazione) come

$$R_X(n_1, n_2) = E[X(n_1)X(n_2)^*] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} ab^* f_{X(n_1)X(n_2)}(a, b)dad b$$

Per quanto riguarda la stazionarietà i concetti definiti per i processi casuali a tempo continuo possono essere estesi anche per quelli a tempo discreto. In particolare un processo aleatorio discreto si dirà stazionario (in senso stretto o in senso lato) se

i parametri statistici del processo stesso non dipendono dal tempo o dipendono solo dalle differenze temporali tra gli istanti di tempo considerati. Vale pertanto la relazione $R_X(0) = M_X$ dove con M_X indichiamo la potenza statistica del processo discreto.

Un processo casuale discreto può essere ottenuto anche come campionamento di un processo continuo. Campionare un processo continuo significa campionare tutte le sue realizzazioni con lo stesso intervallo di campionamento. Quindi è possibile associare una sequenza ad ogni realizzazione campionata esattamente. Intuitivamente se il processo continuo di partenza è stazionario lo sarà anche il processo discreto da esso ottenuto tramite campionamento. Inoltre per processi stazionari almeno in senso lato, il valore medio del processo continuo coinciderà con il valor medio del processo discreto.

La densità spettrale di potenza per i processi discreti viene definita come

$$S_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X(k) e^{-j2\pi f k}$$

e risulta quindi una funzione periodica di periodo pari a 1. La potenza statistica del processo è data da $E[|X(t)|^2] = R_X(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} S_X(f) df = \int_0^1 S_X(f) df$. In generale l'integrale può essere esteso a un intervallo pari al periodo (di estensione pari a 1) scelto ovunque sull'asse delle frequenze. Consideriamo ad esempio $R_X(k) = A\delta(k)$ (vale A per $k = 0$, 0 in tutti gli altri casi) ho allora

$$S_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X(k) e^{-j2\pi f k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A\delta(k) e^{-j2\pi f k} = A$$

Anche la potenza statistica in questo caso vale $R_X(0) = M_X = A$.

Se non si lavora con variabili normalizzate va considerato un fattore di normalizzazione T in modo che risulti comunque vera la formula $R_X(0) = M_X$. Infatti in questo caso abbiamo che la densità spettrale di potenza è una funzione periodica di periodo $\frac{1}{T}$ e l'integrale per ottenere la potenza statistica va esteso ad un intervallo pari a $\frac{1}{T}$. Quindi

$$R_X(kT) = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X(kT) e^{-j2\pi f kT}$$

10.4 Filtri interpolatori (modulatori PAM)

La trasmissione del valore (continuo o discreto) di una serie di campioni o di dati può essere ottenuta generando una serie regolare di forme d'onda (impulsi) la cui ampiezza è direttamente proporzionale ai valori da trasmettere. Tale tecnica assume il nome di trasmissione PAM (Pulse Amplitude Modulation). Ad esempio posso scegliere come forma d'onda base un impulso rettangolare $g(t)$, le informazioni codificate con una sequenza di numeri $a(n)$ saranno trasmesse variando opportunamente l'ampiezza di tale forma d'onda come mostrato in figura 10.10. Se ammettiamo di trasmettere un valore ogni T secondi abbiamo che il segnale generato avrà la seguente forma

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a(n)g(t - nT)$$

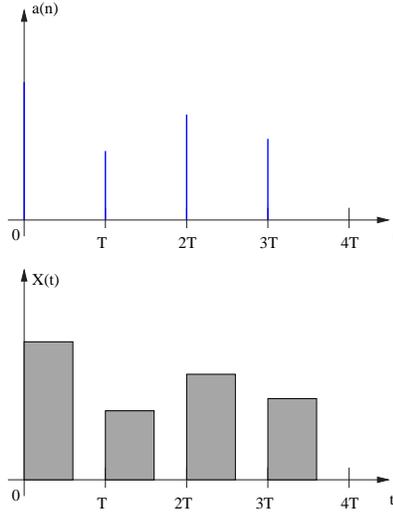


Figura 10.10: Trasmissione con modulazione PAM

dove gli $a(n)$ rappresentano i valori da trasmettere, mentre $g(t)$ è la forma d'onda base considerata.

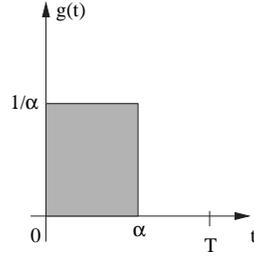
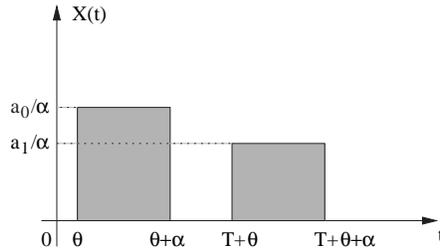
Il nostro obiettivo è quello di dare un'interpretazione statistica alla trasmissione numerico con modulazione PAM. Supponiamo che l'insieme degli $a(n)$ sia un processo discreto e stazionario, almeno in senso lato; $X(t)$ sarà anch'esso un processo casuale (continuo). $X(t)$ non sarà, in generale, un processo stazionario nemmeno in senso lato, infatti la media del processo risulterà una funzione periodica del tempo (periodo T). Questo è dovuto al fatto che negli intervalli in cui si estende la forma d'onda base il processo può assumere qualsiasi valore, mentre nei restanti punti avrà sempre valore nullo. Anche la funzione di autocorrelazione $R_X(t, t - \tau)$ risulterà periodica sia in t che in τ . Questo tipo di processi viene detto *ciclostazionario*. Perché $X(t)$ possa essere, in generale, *stazionario* è necessario definire $X(t)$ in maniera leggermente diversa

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a(n)g(t - nT - \vartheta)$$

dove ϑ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita fra 0 e T (o comunque su di un intervallo pari al passo di ripetizione degli impulsi). In altre parole $X(t)$ è una ripetizione regolare di impulsi (con ampiezze casuali), ma la fase di questi non è nota, ma può assumere, per ogni realizzazione un valore diverso.

Aggiungiamo ora qualche altra ipotesi sul processo casuale discreto $a(n)$, esso avrà media nulla, varianza pari a σ^2 e gli $a(n)$ saranno incorrelati tra loro pertanto $R_{a(n)} = \sigma^2\delta(n)$. Inoltre $g(t)$ sia un impulso rettangolare con base minore o al massimo uguale a T rappresentato in figura 10.11. Il processo $X(t)$ è rappresentato in figura 10.12. Calcolando la media di $X(t)$ si ottiene 0. Per quanto riguarda l'autocorrelazione di debbono considerare una serie di casi differenti per analizzare tutte le situazioni possibili nella scelta di t_1 e t_2 . Si può vedere facilmente che la funzione di autocorrelazione dipende solo dalla distanza tra gli istanti considerati. Poniamo $\tau = t_2 - t_1$ e ricordiamo che $R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$ possiamo considerare tre casi:

1. $|\tau| > T$ si ha che t e $t + \tau$ cadono in due intervalli di tempo diversi quindi

Figura 10.11: Forma d'onda base $g(t)$ Figura 10.12: Processo stazionario $X(t)$

almeno uno dei due valori è nullo oppure i due $a(n)$ sono incorrelati, pertanto $R_X(\tau) = 0$;

2. $\alpha < |\tau| < T$ si ha che in almeno uno dei due istanti ho un valore nullo pertanto $R_X(\tau) = 0$;
3. $|\tau| < \alpha$ i due istanti possono cadere entrambi in uno stesso impulso oppure uno dentro ed uno fuori. Nel primo caso ci dobbiamo chiedere quale è la probabilità che t e $t + \tau$ cadano nello stesso impulso. Tale calcolo può essere effettuato sfruttando il teorema della probabilità totale con condizionamento rispetto a ϑ che è l'unica variabile aleatoria presente. Affinché l'evento $A = \{\text{sia } t_1 \text{ che } t_2 \text{ cadono nello stesso impulso}\}$ si verifichi, occorre che sia soddisfatto uno dei casi seguenti $\vartheta < t_1$ e $\vartheta + \alpha < t_2$ oppure $\vartheta < t_2$ e $\vartheta + \alpha < t_1$. Nel primo caso si trova

$$p = \int_{t_2 - \alpha}^{t_1} P[A|\vartheta = a] f_\vartheta(a) da = \frac{\alpha}{T} \left(1 - \frac{\tau}{\alpha}\right)$$

nel secondo invece $p = \frac{\alpha}{T} \left(1 + \frac{\tau}{\alpha}\right)$. Quindi avremo che $R_X(\tau) = \left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{T}\right) \left(1 - \frac{|\tau|}{\alpha}\right)$.

Più formalmente possiamo scrivere, supponendo che il processo $X(t)$ sia reale

$$R_X(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a(n)g(t - nT - \vartheta) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a(m)g(t + \tau - nT - \vartheta) \right]$$

Gli $a(n)$ e $a(m)$ sono incorrelati pertanto se $n \neq m$ la correlazione è nulla pertanto

$$\begin{aligned} R_X(t, t+\tau) &= E \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a(n)g(t - nT - \vartheta) a(n)g(t + \tau - nT - \vartheta) \right] = \\ &= \sigma^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(t - nT - \vartheta)g(t + \tau - nT - \vartheta) d\vartheta = (x = t - nT - \vartheta) \\ &= \sigma^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{t-nT-T}^{t-nT} g(x)g(x + \tau) dx = R_X(\tau) \end{aligned}$$

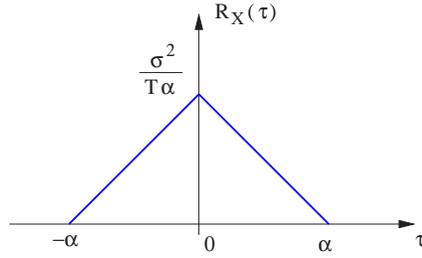
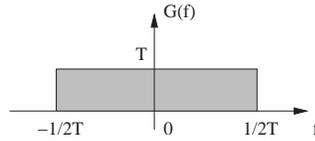


Figura 10.13: Funzione di autocorrelazione

Figura 10.14: Trasformata di Fourier della forma d'onda base $g(t)$ (seno cardinale)

Il processo risulta quindi essere stazionario e la funzione di autocorrelazione rappresentata in figura 10.13 risulta essere pari a

$$R_X(\tau) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{T\alpha} \left(1 - \frac{|\tau|}{\alpha}\right) & |\tau| \leq \alpha \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

In particolare se facciamo tendere α a 0 abbiamo che la forma d'onda base $g(t)$ tende all'impulso ideale (di area unitaria) e quindi $R_X(\tau) = \frac{\sigma^2}{T} \delta(\tau)$. Per quanto riguarda la densità spettrale di potenza, nel caso in cui la forma d'onda base sia un impulso ideale di area unitaria, si ha $S_X(f) = \frac{\sigma^2}{T}$.

Aver calcolato questa densità spettrale ci è molto utile, in quanto da questa si può ricavare la densità spettrale di potenza relativa al caso in cui la forma degli impulsi sia qualsiasi. Infatti basta far passare il nostro treno di impulsi ideali con area $a(n)$ attraverso un filtro con risposta all'impulso pari alla forma d'onda scelta come forma base. Se gli $a(n)$ hanno media 0, varianza σ^2 , sono incorrelati tra loro e la forma base degli impulsi è $g(t)$ si avrà (nell'ipotesi che la fase del nostro treno di impulsi sia casuale):

$$S_X(f) = \frac{\sigma^2}{T} |G(f)|^2$$

Un caso particolarmente interessante si ha quando $g(t)$ è un filtro di ricostruzione ideale (seno cardinale) cioè quando:

$$g(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\left(\frac{\pi t}{T}\right)}$$

La trasformata di Fourier di questa forma d'onda vale $G(f) = T \text{rect}(fT)$ ed è rappresentata in figura 10.14. In questo caso si avrà che la densità spettrale di potenza del processo casuale, rappresentata in figura 10.15, avente come forma d'onda base $g(t)$ vale

$$S_X(f) = \begin{cases} \sigma^2 T & -\frac{1}{2T} \leq f \leq \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La potenza statistica vale $\sigma^2 T \frac{1}{T} = \sigma^2$.

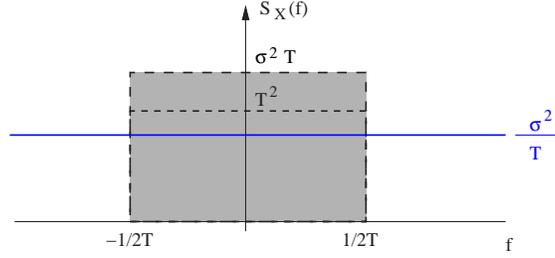


Figura 10.15: Densità spettrale di potenza del processo avente come forma d'onda $g(t)$ (seno cardinale)

Rimuoviamo ora l'ipotesi secondo la quale gli $a(n)$ siano un processo bianco (media nulla ed incorrelazione fra i vari elementi della frequenza):

$$\begin{aligned}
 R_X(\tau) &= E \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a(n)g(t - nT - \vartheta) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a(m)g(t + \tau - mT - \vartheta) \right] = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E[a(n)a(m)] E[g(t - nT - \vartheta)g(t + \tau - mT - \vartheta)] = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_a(m - n) \frac{1}{T} \int_0^T g(t - nT - \vartheta)g(t + \tau - mT - \vartheta) d\vartheta = (v = t - nT - \vartheta) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_a(m - n) \frac{1}{T} \int_0^T g(v)g(v + \tau + (m - n)T) dv = (k = m - n) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a(k) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{t-nT}^{t-nT+T} g(v)g(v + \tau - kT) dv = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a(k) \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} g(v)g(v + \tau - kT) dv = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a(k) \frac{1}{T} C_g(\tau - kT)
 \end{aligned}$$

C_g è l'autocorrelazione deterministica del segnale $g(t)$, definita nel modo seguente $C_g(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)g(t + \tau)dt$. Considerando il caso in cui $g(t)$ è un impulso rettangolare di area unitaria e base α abbiamo

$$C_g(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{|\tau|}{\alpha}\right) & |\tau| < \alpha \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Facendo tendere α a 0 otteniamo

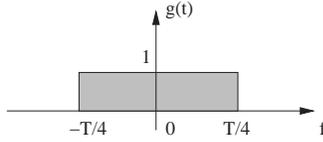
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} g(t) = \delta(t) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} C_g(\tau) = \delta(\tau)$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 R_X(\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a(k) \frac{1}{T} \delta(\tau - kT) \tag{10.4} \\
 S_X(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_a(k) \frac{1}{T} e^{-j2\pi f k T}
 \end{aligned}$$

La relazione precedente può quindi essere utilizzata per calcolare l'autocorrelazione di un processo costituito da un treno regolare di impulsi ideali (con fase casuale) ed area casuale quando sia nota la correlazione della sequenza dei valori di queste aree ($a(n)$). Più in generale la relazione 10.4 può essere usata per calcolare sia l'autocorrelazione che la densità spettrale di potenza di un generico processo PAM ricordando ancora una volta come, a partire da un processo PAM in cui la forma base degli impulsi è una delta di Dirac, sia possibile generare un processo PAM in cui la forma d'onda degli impulsi sia possibile. Ciò può essere ottenuto facendo passare il processo di partenza attraverso un filtro con risposta all'impulso pari a quella desiderata per l'impulso base. In conclusione possiamo scrivere

$$R_X(\tau) = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a(k) \frac{1}{T} \delta(\tau - kT) \right] * g(-\tau)^* * g(\tau)$$

Figura 10.16: Forma d'onda base $g(t)$

$$S_X(f) = \frac{1}{T} |G(f)|^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_a(k) e^{-j2\pi f k T}$$

Esempio Si calcoli la densità spettrale di potenza di un processo PAM caratterizzato da un passo T di ripetizione degli impulsi e dalla forma d'onda rappresentata in figura 10.16. Abbiamo poi

$$R_a(k) = \begin{cases} \frac{A^2}{2} & k = 0 \\ \frac{A^2}{4} & k \neq 0 \end{cases}$$

Detto in altri termini gli $a(n)$ hanno media $\frac{A}{2}$ e varianza $\frac{A^2}{4}$ per cui $R_a(k) = \frac{A^2}{4} \delta(k) + m_a^2$. Possiamo quindi ricavare

$$\begin{aligned} S_y(f) &= \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{A^2}{4} e^{-j2\pi f k T} \right) + \frac{A^2}{4} \right] |G(f)|^2 = \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta \left(f - \frac{l}{T} \right) \right] \frac{T^2}{4} \frac{[\sin(\frac{\pi f T}{2})]^2}{(\frac{\pi f T}{2})^2} \end{aligned}$$

10.5 Analisi statistica dell'errore di quantizzazione

L'obiettivo di questa sezione è quello di analizzare l'operazione di quantizzazione da un punto di vista statistico. Consideriamo in particolare un quantizzatore uniforme, descritto nel paragrafo 5.6. Prendiamo un segnale $s(t)$ a banda limitata. Esso potrà essere campionato rispettando il teorema del campionamento se per la frequenza di campionamento vale la relazione $f_c > 2f_m$. Attraverso l'operazione di campionamento passiamo da un segnale continuo all'insieme dei suoi campioni $s(nT)$. Se quantizziamo i campioni ottenuti abbiamo $s_q(nT) = s(nT) + e_q(nT)$ dove gli $e_q(nT)$ rappresentano i campioni dell'errore di quantizzazione.

Vogliamo studiare le caratteristiche statistiche dell'insieme dei campioni dell'errore di quantizzazione e del segnale (processo) che può essere ricostruito da tali campioni. In ogni istante di tempo il singolo campione dell'errore di quantizzazione può essere modellizzato come una variabile con densità di probabilità delle ampiezze uniforme. I campioni degli errori di quantizzazione in due istanti diversi sono incorrelati. La fase iniziale del treno di impulsi di campionamento è una variabile casuale ϑ uniformemente distribuita tra 0 e T . Inoltre gli errori di quantizzazione hanno media nulla e varianza $\sigma_{e_q}^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \sigma^2$ (dove Δ rappresenta l'intervallo di quantizzazione). Cercando di ricostruire un segnale continuo a partire dagli errori quantizzati otteniamo tramite una trasmissione PAM, il processo che si ottiene può essere rappresentato come $\hat{e}_q(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e_q(n)g(t - nT - \vartheta)$ Indichiamo con $g(t)$ un filtro di ricostruzione ideale $g(t) = \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{(\frac{\pi t}{T})}$. Ovviamente l'errore ha una banda maggiore rispetto a quella del segnale, quindi il campionamento non può essere corretto. Da quanto visto per i processi PAM abbiamo $S_{e_q}(f) = \sigma^2 T$ dove $S_{e_q}(f)$ rappresenta la

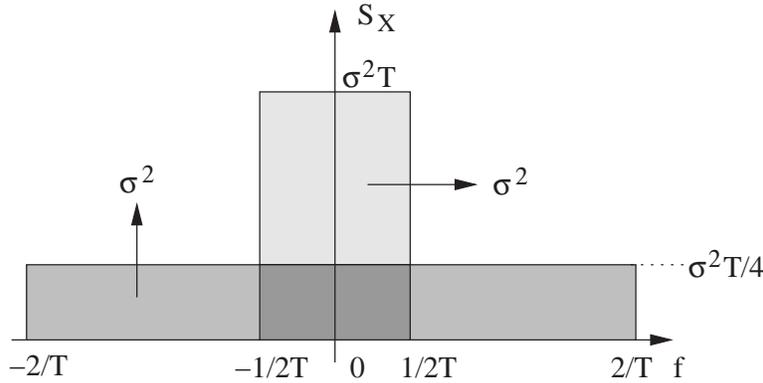


Figura 10.17: Potenza media del processo ricostruito dai campioni dell'errore di quantizzazione

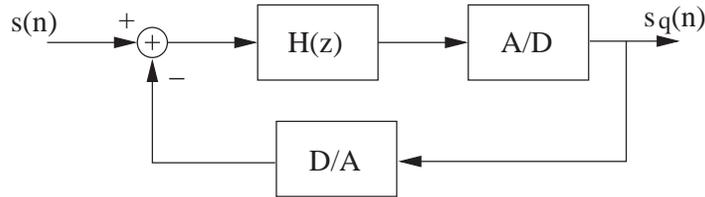


Figura 10.18: Sistema iniziale

densità spettrale di potenza del processo in esame. In figura 10.17 è rappresentata la potenza media del processo ricostruito dai campioni dell'errore di quantizzazione, pari a σ^2 . Va notato come $\sigma^2 = \frac{\Delta}{12}$ non dipenda dalla frequenza di campionamento. Posso variare f_c ma la potenza del rumore di quantizzazione rimane costante. Il nostro obiettivo è ora quello di analizzare alcune tecniche per ridurre la potenza di questo errore. Un modo piuttosto semplice è quello di quadruplicare la frequenza di campionamento, portandola, nel nostro caso a $\frac{4}{T}$, e di ricostruire poi il segnale nella banda minima. Questo procedimento rappresentato nella figura 10.17 è equivalente a guadagnare un bit nel quantizzatore (è come se si avesse un quantizzatore con un bit in più). A partire da un quantizzatore a pochi bit è quindi possibile realizzarne uno con caratteristiche migliori (con più bit) sovracampionando il segnale. Questa operazione è molto costosa, per guadagnare un bit devo sovracampionare di un fattore quattro. Più in generale per guadagnare k bit devo sovracampionare di un fattore 2^{2k} . Inoltre sopra una certa frequenza di campionamento i campioni dell'errore di quantizzazione non possono più essere considerati incorrelati.

10.6 Convertitori sigma-delta

In questo paragrafo ci proponiamo di analizzare una tecnica che ci permetta di migliorare i risultati nella riduzione della potenza del rumore di quantizzazione ottenuti in precedenza, tramite un semplice sovracampionamento. Consideriamo la struttura rappresentata in figura 10.18, dove $H(z)$ rappresenta un sistema lineare, A/D rappresenta un convertitore analogico-digitale che può essere assimilato a un codificatore seguito da un quantizzatore e D/A è un convertitore digitale-analogico. Per i nostri scopi possiamo tralasciare i blocchi di codifica e decodifica. Lo schema a blocchi del sistema diventa quello di figura 10.19, dove il blocco Q rappresenta

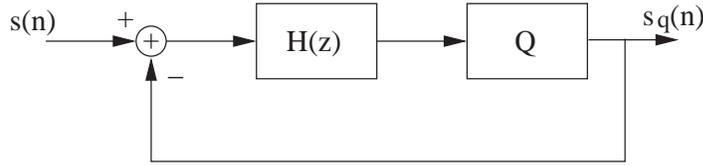


Figura 10.19: Sistema ottenuto tralasciando i blocchi di codifica e decodifica

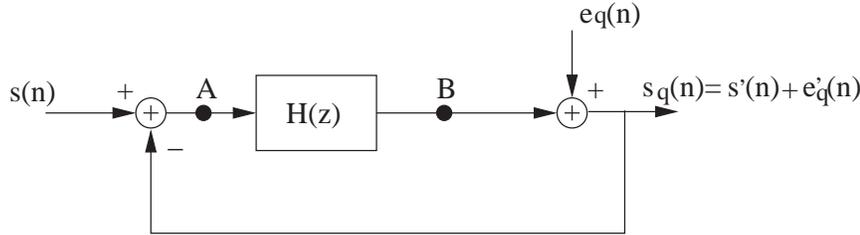


Figura 10.20: Sistema ottenuto rappresentando l'equivalente del blocco di quantizzazione

il blocco di quantizzazione. Il blocco di quantizzazione Q trasforma in modo non lineare il nostro segnale, esso può essere visto come un nodo sommatore nel quale si aggiunge al segnale utile, il rumore di quantizzazione. Questa situazione è rappresentata in figura 10.20. La funzione di trasferimento $H(z)$ svolge la funzione di integratore per i segnali campionati ed è mostrato in figura 10.21, la funzione di trasferimento del sistema è data da $H(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$, ricordiamo infatti che il ritardo è l'implementazione numerica di un integrale. Analizziamo, prima la funzione di trasferimento tra $s(n)$ e $s'(n)$ e poi quella tra $e_q(n)$ e $e'_q(n)$. Per fare questo mettiamo a zero l'errore di quantizzazione $e_q(n)$. Otteniamo, considerando l'anello di retroazione che

$$S'(z) = \frac{H(z)}{1 + H(z)} S(z) = z^{-1} S(z)$$

pertanto si trova facilmente che $H_S(z) = \frac{S'(z)}{S(z)} = z^{-1}$ ed in frequenza $H_S(f) = e^{-j2\pi fT}$ dove T è il periodo di campionamento. In ogni caso il rapporto tra $s'(n)$ ed $s(n)$ è un semplice ritardo, i loro moduli rimangono uguali.

Poniamo ora a zero il segnale $s(n)$, otteniamo il sistema in figura 10.22, che può essere rappresentato anche come in figura 10.23.

La funzione di trasferimento del sistema risulta essere $H_N(z) = \frac{E'_q(z)}{E_q(z)} = \frac{1}{1+H(z)} = 1 - z^{-1}$ ed in frequenza $H_N(f) = 1 - e^{-j2\pi fT} = 2je^{-j\frac{2\pi fT}{2}} \sin(\pi fT)$. Valutando il modulo di questo funzione delle frequenze abbiamo

$$|H_N(f)| = |2 \sin(\pi fT)|$$

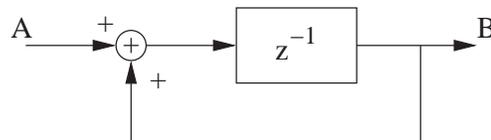


Figura 10.21: Funzione di trasferimento $H(z)$

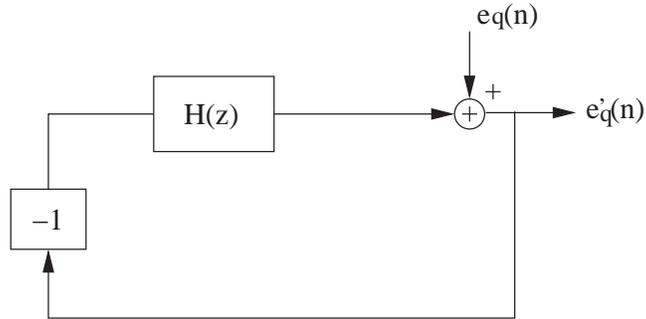


Figura 10.22: Sistema ottenuto ponendo $s(n)$ a zero

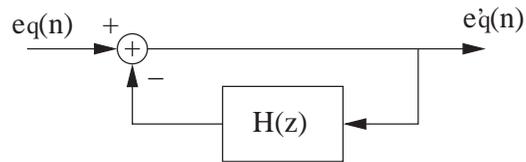


Figura 10.23: Riscrittura del sistema ottenuto ponendo $s(n)$ a zero

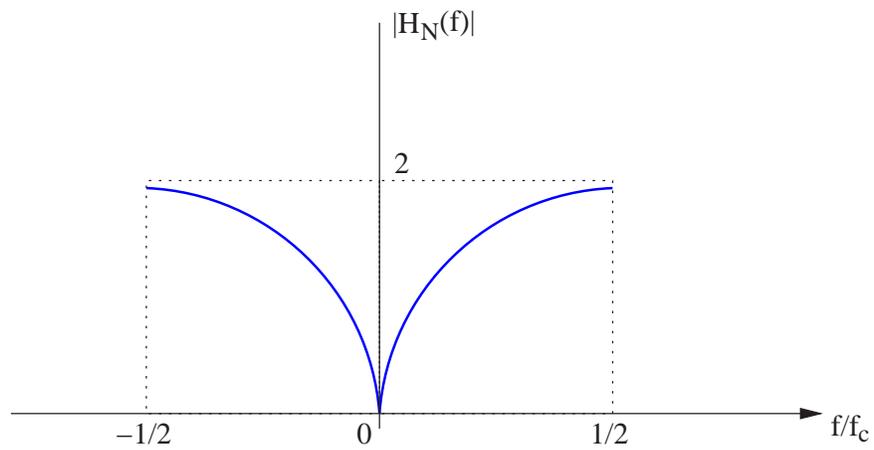


Figura 10.24: Modulo della funzione di trasferimento $H_N(z)$

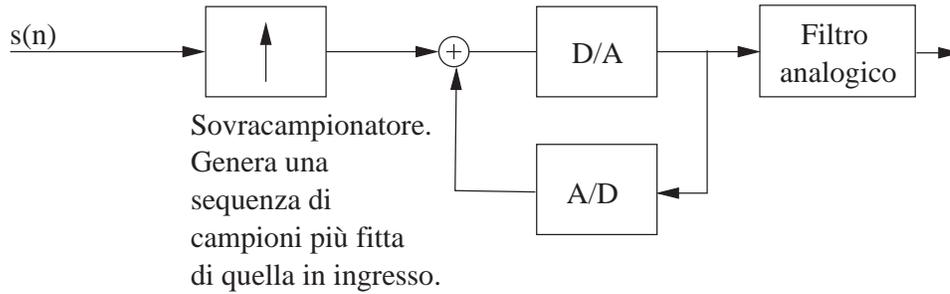


Figura 10.25: Convertitore D/A Sigma-Delta

che è rappresentato in figura 10.24. Osserviamo che $H_N(f)$ tende a concentrare il rumore di quantizzazione alle alte frequenze. La densità spettrale del processo $e'_q(nT)$ è data da

$$S'_q(f) = \sigma^2 T 4 \sin^2(\pi f T)$$

Mentre la potenza del processo sarà data da

$$P'_q = \int_{-f_m}^{f_m} S'_q(f) df = \int_{-f_m}^{f_m} 4T\sigma^2 \sin^2(\pi f T) df$$

dove f_m è la reale frequenza massima del segnale che interessa campionare e quantizzare. Se come accade nella realtà $f_m \ll \frac{1}{T}$ possiamo approssimare il seno con il suo argomento

$$P'_q = \int_{-f_m}^{f_m} 4T\sigma^2 (\pi f T)^2 df = 8\sigma^2 T^3 \pi^2 \frac{f_m^3}{3} = \sigma^2 \pi^2 \frac{1}{3} \left(\frac{2f_m}{f_c} \right)^3 = 3,3\sigma^2 R^{-3}$$

dove $R = \frac{f_c}{2f_m}$ rappresenta il fattore di sovracampionamento. $\frac{P'_q}{\sigma^2}$ rappresenta il rapporto tra il rumore di quantizzazione ottenuto da strutture come quelle analizzate e quello ottenuto da quantizzatori classici. Nel caso analizzato si ha $\frac{P'_q}{\sigma^2} = \frac{3,3}{R^3}$. Quindi per ridurre il rumore di quantizzazione di un fattore 2^{2k} con $k = 4$ (guadagnare 4 bit sul quantizzatore) bisogna considerare un fattore di sovracampionamento tale che $\frac{3,3}{R^3} = \frac{1}{256}$ e quindi $R = 9,4$ circa.

Le strutture di quantizzazione analizzate prendono il nome di strutture (quantizzatori) Sigma-Delta. Il nome deriva dal fatto che includono sia un'operazione di accumulo (Sigma) che di quantizzazione, spesso ad un bit (che genera due soli valori +Delta, -Delta). Il quantizzatore Sigma-Delta analizzato è quello analizzato dalla struttura topologica più semplice. I dispositivi reali utilizzano architetture un po' più complesse. Un'altra prerogativa interessante degli A/D Sigma-Delta è rappresentata dal fatto che campionando a frequenze molto elevate non necessitano di filtri anti-aliasing. Sulla base degli stessi principi si possono realizzare anche D/A a sovracampionamento, di cui rappresentiamo lo schema a blocchi in figura 10.25.

10.7 Processi ergodici

Spesso del fenomeno che si intende modellizzare come un processo è nota una sola realizzazione, intuitivamente i processi ergodici permettono di stimare tutte le caratteristiche statistiche di un processo casuale da una sola realizzazione. In generale indicheremo con $X(t)$ un processo casuale, con $x(t)$ una sua realizzazione.

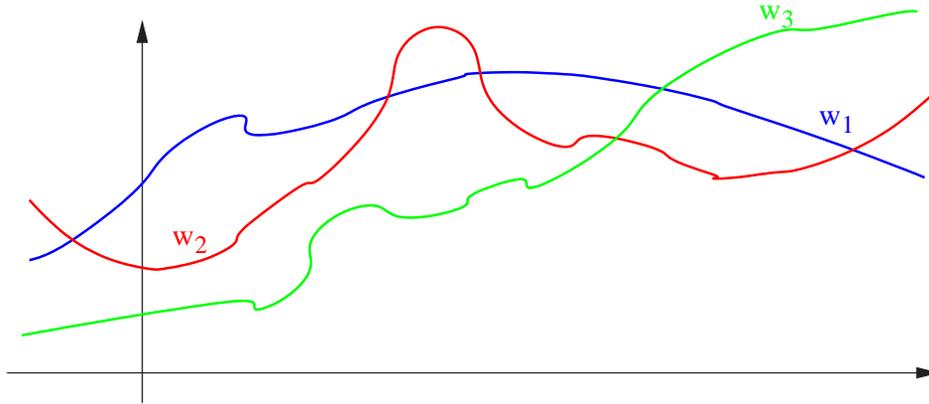


Figura 10.26: Realizzazioni di un processo aleatorio

Spesso alla media di un processo aleatorio viene dato il nome di media d'insieme: infatti essa può essere vista come una media (ad un determinato istante) tra tutte le possibili realizzazioni. Facendo riferimento alla Figura 10.26 in cui sono visualizzate le realizzazioni di un processo la media è un'operazione in verticale. La media temporale corrisponde alla media fra tutti i campioni di una realizzazione del processo aleatorio (operazione in orizzontale):

$$\overline{m_X} = \lim_{t \rightarrow \infty} \overline{m_{XT}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

dove, come abbiamo detto sopra, $x(t)$ è una realizzazione del processo. Consideriamo la media troncata $\overline{m_{XT}(t)} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$ ed appliciamola all'intero processo $\overline{m_{XP}(t)} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t) dt$. Se il processo aleatorio è stazionario, si ha

$$E \left[\overline{m_{XP}(t)} \right] = E \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t) dt \right] = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} m_X(t) dt = m_X$$

perciò $\overline{m_{XP}(t)}$ può essere visto come una stima non polarizzata di m_x . L'accuratezza di tale stima è tanto più elevata quanto più piccola è la sua varianza.

Diremo che un processo aleatorio $X(t)$ è ergodico in media quando la media di insieme coincide con la media temporale $\overline{m_X} = m_X$. Visto che non è possibile calcolare medie temporali di estensione infinita per garantire l'ergodicità in media dovremo imporre che la varianza di $\overline{m_{XT}(t)}$ vista come variabile aleatoria tenda a zero per $T \rightarrow \infty$. Tale condizione è equivalente a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_X(\tau) d\tau = |m_X|^2$$

il che corrisponde ad affermare che l'autocorrelazione, al crescere di $|\tau|$ si assesta ad un valore costante. Quest'ultima condizione è necessaria e sufficiente perché un processo sia ergodico in media. Si noti che, quando un processo aleatorio è asintoticamente incorrelato risulta

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} E[X(t)X^*(t + \tau)] = |m_X|^2$$

perciò la condizione di ergodicità è certamente soddisfatta. L'incorrelazione asintotica è condizione sufficiente per l'ergodicità in media.

Ci interessa anche l'ergodicità in correlazione. Definiamo la funzione di autocorrelazione temporale media come

$$\overline{R_X(\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t + \tau) dt$$

Analogamente alla media diremo che $X(t)$ è ergodico in correlazione quando $\overline{R_X(\tau)} = R_X(\tau)$.

Affinché un processo aleatorio sia ergodico è ovviamente *necessario* che sia *stazionario*.

Supponiamo ora di avere a che fare con un processo ergodico (e quindi anche stazionario) di cui conosciamo una versione troncata di una realizzazione del processo, ad esempio nell'intervallo $-\frac{T}{2}$ e $\frac{T}{2}$. Chiamiamo questo segnale troncato $x_T(t)$. Possiamo stimare la potenza della realizzazione. La potenza della realizzazione troncata vale

$$P_T = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T^2(t) dt$$

quella della realizzazione completa $P = \lim_{T \rightarrow \infty} P_T$. P_T è una stima della potenza della realizzazione e quindi anche una stima della potenza del processo stocastico preso in considerazione M_X poiché il processo è assunto ergodico. Ricordando il teorema di Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

è possibile domandarsi se sia possibile estendere ciò anche alla densità spettrale di potenza. La relazione $S_X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$ non è vera. La relazione corretta è invece

$$S_X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E [|X_T(f)|^2]$$

Da questa relazione appare come per poter stimare la densità spettrale di potenza sia necessario osservare un numero significativo di realizzazioni del processo in esame. Se il processo è ergodico possiamo avere una stima della densità spettrale di potenza anche da una sola realizzazione poiché tratti distinti della realizzazione portano la stessa informazione che porterebbero tratti di realizzazioni distinte. Quello che possiamo fare è quindi suddividere il tratto di segnale a disposizione in tante parti. Calcolare per ognuna di esse il modulo quadro della trasformata e mediarle tra loro. Nel discreto è molto facile vedere che questa operazione riduce la risoluzione spettrale (che avviene comunque anche nel continuo). Partiamo da 1024 campioni nel tempo. Operando una sola trasformata otteniamo 1024 valori della trasformata compresi fra le frequenze, normalizzate $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$. Se ora prendiamo il modulo quadro di questa trasformata otteniamo una stima della densità spettrale di potenza del processo. Tale stima sarà affetta, frequenza per frequenza, da una varianza molto alta. Se facciamo due trasformate su 512 campioni e ne mediamo i moduli quadri otteniamo una nuova stima con varianza più bassa, ma anche con risoluzione minore. Aumentando il numero di trasformate effettuate diminuiamo sempre più la varianza della stima a scapito della risoluzione spettrale.

Capitolo 11

Trasmissione di segnali analogici

11.1 Analisi dei disturbi

Un sistema di trasmissione può essere modellizzato attraverso uno schema a blocchi in cui vi sia un blocco T con ingresso un segnale $s(t)$ e in uscita un segnale $u(t)$; ad esempio nel caso di un sistema amplificatore ci si aspetterebbe che valga $u(t) = As(t)$ con A costante indicante l'amplificazione. Tuttavia ogni sistema di trasmissione è affetto da disturbi e quindi la reale uscita del generico sistema di trasmissione sarà data da

$$u_r(t) = u(t) + d(t) + n(t)$$

dove $d(t)$ è il termine di *distorsione*, funzione dell'ingresso, ed è dovuto al comportamento non ideale del dispositivo di trasmissione, mentre $n(t)$ è il *disturbo o rumore* introdotto.

I disturbi possono essere suddivisi in tre tipi:

- Disturbi da interferenza: sono dovuti all'interferenza di un segnale con un altro e possono essere ridotti attraverso una buona progettazione dei dispositivi coinvolti.
- Disturbi di origine esterna: comprendono il rumore dell'atmosfera, il rumore artificiale e la radiazione cosmica di fondo.
- Disturbi di origine interna: a loro volta possono essere raggruppati in *rumori di tipo termico*, dovuti all'agitazione termica degli elettroni, *rumori di tipo shot*, dovuti al fatto che il trasporto di cariche è sempre quantizzato e *rumori di tipo flicker*, dovuti alla propagazione irregolare nei mezzi materiali a causa di imperfezioni nel reticolo cristallino. Tutti i disturbi di questa categoria sono di tipo impulsivo.

In generale un rumore può essere scritto come $n(t) = \sum_n g_n s(t - t_n, \alpha_n)$ ossia come sovrapposizione di impulsi di forma base $s(t)$; α_n è un parametro e serve per indicare la forma.

Nel caso si considerino rumori di tipi shot o flicker, la precedente formula può essere semplificata ottenendo $n(t) = \sum_n g s(t - t_n)$. Comunque in entrambi i casi

viene individuato un processo di Poisson caratterizzato dal numero di impulsi attivi contemporaneamente, ossia dalla densità di impulsi; essa risulta pari a $\delta = \bar{n}\bar{T}$ dove \bar{n} indica il numero medio di impulsi generati al secondo mentre \bar{T} indica la durata media degli impulsi stessi.

A seconda del valore della densità di impulsi il rumore assume caratteristiche diverse; ad esempio se $\delta \leq 1$ il rumore $n(t)$ ha caratteristiche impulsive mentre se $\delta > 10$ il rumore è detto *regolare* ed ha una distribuzione gaussiana.

11.1.1 Rumore termico

Si consideri la situazione in cui un processo casuale possa essere interpretato attraverso tante di resistenze uguali e poste alla stessa temperatura; misurando la tensione a vuoto ai capi delle resistenze si ottengono tante realizzazioni del processo. Si può mostrare che tale processo gode delle seguenti proprietà:

- ha densità di probabilità delle ampiezze gaussiana
- è stazionario
- è ergodico (e quindi è possibile estrarre tutte le informazioni sul processo stesso da una sola resistenza)

Detto V tale processo, è possibile calcolarne la densità spettrale di potenza dovuta a rumore termico che risulta pari a

$$S_V(f) = 2KTR\gamma(f)$$

con

$$\gamma(f) = \frac{\frac{hf}{KT}}{e^{\frac{hf}{KT}} - 1}$$

dove T è la temperatura espressa in gradi Kelvin, R è il valore della resistenza, K è la costante di Boltzman pari a $1.37 \cdot 10^{-23} J/K$, f è la frequenza e h è la costante di Plank pari a $6.6625 \cdot 10^{-24} J/s$. E' facile notare se $f \leq 2 \cdot 10^{10} Hz$ allora $\gamma(f) \simeq 1$ mentre per tutte le altre frequenze $\gamma(f)$ tende a zero. Di conseguenza si può scrivere

$$S_V(f) = 2KTR$$

ottenendo una densità "bianca", costante per ogni frequenza di interesse. Ovviamente risulterà impulsiva la relativa funzione di correlazione.

Si noti che la resistenza "rumorosa" finora considerata può essere vista anche come una resistenza "non rumorosa" in serie ad un generatore di tensione V (sorta di equivalente Thevenin) oppure come una conduttanza $G = \frac{1}{R}$ in parallelo ad un generatore di corrente I (sorta di equivalente Norton). Infine nel caso si sia in presenza di un'induttanza $Z(f)$ invece che di una normale resistenza la densità spettrale di potenza sarà data da $S_V = 2KTRe(Z(f))$; conta infatti solo la componente puramente resistiva dell'induttanza.

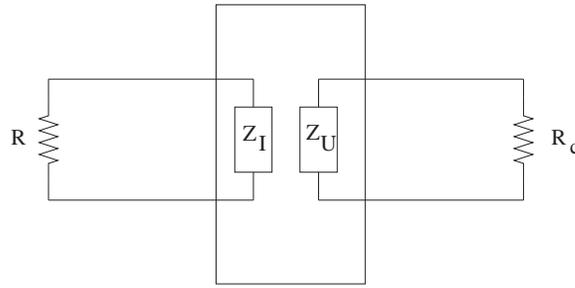


Figura 11.1: Doppio bipolo

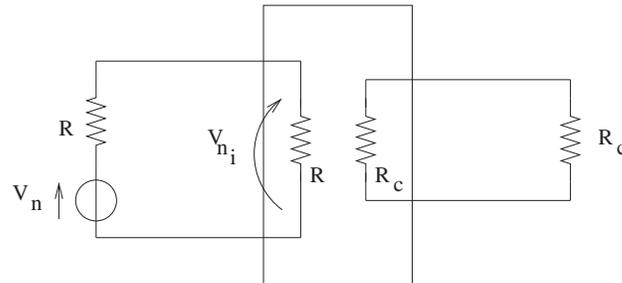


Figura 11.2: Calcolo densità spettrale di potenza disponibile

11.1.2 Rumore nei doppi bipoli

Si consideri il doppio bipolo in Figura 11.1; con R è indicata la resistenza “rumorosa” mentre R_c rappresenta la resistenza di carico ai capi della quale viene misurata la tensione di interesse. Tipicamente in serie alla resistenza R vi è anche il generatore di tensione del segnale; l’obiettivo a cui si mira è avere il massimo trasferimento possibile di potenza utile dal generatore verso il doppio bipolo. Nel caso in cui quest’ultimo sia di tipo puramente resistivo tale massimo di trasferimento di potenza si ha dimensionando le resistenze del doppio bipolo di modo che sia $R_I = R$ e $R_U = R_c$. Qualora invece il doppio bipolo non sia puramente resistivo occorre che le componenti resistive delle impedenze soddisfino la relazione appena scritta mentre per le componenti capacitive devono avere segni opposti. Le condizioni appena descritte prendono il nome di *condizioni di adattamento*.

Considerando quindi di lavorare in condizioni di adattamento, si considera ora come il rumore viene trasferito attraverso il doppio bipolo. Si considera un circuito analogo a quello di Figura 11.1, in cui non sia presente il generatore di segnale; la resistenza “rumorosa”, inoltre, viene scomposta con un equivalente Thevenin attraverso una resistenza R “non rumorosa” e un generatore di tensione V_n pari alla tensione a vuoto che si misurerebbe sulla resistenza “rumorosa” di partenza. Il circuito risultante è mostrato in Figura 11.2. La potenza che cade sul resistore in ingresso al doppio bipolo è pari a $\frac{V_{n_i}^2}{R}$ e dato che $V_{n_i} = \frac{V_n}{2} R = \frac{V_n}{2}$ essa risulta pari a $\frac{V_n^2}{4R}$. La densità spettrale di potenza disponibile risulta invece pari a $G_n(f) = \frac{2KTR}{4R} = \frac{KT}{2}$.

11.1.3 Temperatura equivalente

E’ interessante notare che ogni rumore con densità di probabilità gaussiana può essere visto come rumore termico equivalente con $G_n(f) = \frac{KT(f)}{2}$ dove $T(f)$ è detta

temperatura equivalente e non ha niente a che vedere con la temperatura fisica a cui il doppio bipolo considerato si trova.

Si consideri ora un doppio bipolo che funzioni come amplificatore di potenza con costante di amplificazione A ; tale doppio bipolo sia inoltre in condizioni di adattamento e completamente reale di modo che i rumori da esso generato siano modellizzabili come rumori termici.

La potenza di rumore disponibile in uscita, ossia ai capi della resistenza di carico, sarebbe pari a $A\frac{KT}{2}$ se il doppio bipolo fosse ideale; in realtà essa risulta pari a

$$A\frac{KT}{2} + H = \left(\frac{KT}{2} + \frac{H}{A}\right)A$$

in cui l'espressione fra parentesi indica la densità spettrale di potenza spostata all'ingresso, ossia quella che si avrebbe se il doppio bipolo fosse ideale e il rumore che invece esso genera fosse emesso da una resistenza in ingresso. La potenza di rumore risulta infine pari a

$$\left[\frac{K}{2}(T + T_{eq})\right]A$$

in cui T_{eq} rappresenta la temperatura equivalente di rumore del doppio bipolo; essa è ricavata da $\frac{KT_{eq}}{2} = \frac{H}{A}$ dato che indica di quanto dovrebbe essere alzata la temperatura della resistenza in ingresso per avere il disturbo totale.

A questo punto è possibile analizzare configurazioni composte dalla cascata di due o più doppi bipoli; è facile ricavare che la potenza di rumore risulta pari a

$$\frac{K}{2}\left(T + T_{eq1} + \frac{T_{eq2}}{A_1} + \frac{T_{eq3}}{A_1A_2} + \dots\right)$$

dove i T_{eq_i} rappresentano le temperature equivalenti dei vari doppi bipoli mentre gli A_i indicano i coefficienti di amplificazione dei doppi bipoli stessi. Si noti come la temperatura equivalente risultante si influenza quasi esclusivamente dalla temperatura equivalente del primo doppio bipolo dato che le seguenti sono divise per i coefficienti di amplificazione; ne segue che il rumore è tanto più rilevante quanto più si è vicini al primo stato di amplificazione, ossia, giustamente, il segnale è piccolo.

Fattore di rumore La densità spettrale di potenza di rumore all'ingresso di un doppio bipolo può essere espressa anche come

$$\frac{KT}{2} + \frac{H}{A} = KTF$$

dove F è detto *fattore di rumore* e dipende dalla temperatura a cui è posta la resistenza R . Nel caso R sia a temperatura $T_0 = 293K$ risulta $G_n(f) = \frac{KT_0}{2}F$, qualora invece la resistenza R si trovi ad una temperatura T differente si ha $G_n(f) = \frac{K}{2}(T + T_0(F - 1))$. Infine, nel caso sia abbia la cascata di più doppi bipoli ognuno caratterizzato da un certo fattore di rumore si avrà $F_T = F_1 + \frac{F_2 - 1}{A_1} + \frac{F_3 - 1}{A_2} + \dots$

11.2 Attenuatore passivo

Si consideri un doppio bipolo caratterizzato da amplificazione di potenza $A(f)$; in ingresso a tale dispositivo vi sia un rumore $n(t)$ con densità spettrale di potenza

costante pari a $h_n(f) = \frac{\eta}{2}$. È possibile calcolare la potenza disponibile in uscita che è data da

$$\int_B h_n(f)A(f)df = \frac{\eta}{2} \int_B A(f)df$$

dove con B è indicata la banda di interesse. In molte situazioni è interessante poter scrivere la relazione precedente come $\frac{\eta}{2}AB$ considerando il fattore di amplificazione di potenza costante pari all'amplificazione media; con B invece si indica la banda equivalente di rumore.

Nel caso la costante di amplificazione sia minore di 1 e il doppio bipolo puramente passivo si ha a che fare con un componente detto *attenuatore passivo*.

Si consideri dunque un attenuatore passivo posto a temperatura T ; si desidera calcolare la temperatura equivalente T_{eq} di tale dispositivo.

Si supponga di avere la porta in ingresso al doppio bipolo chiusa su una resistenza adattata e posta anch'essa a temperatura T . Osservando il dispositivo risultante dalla porta in uscita del doppio bipolo si vedrebbe un unico bipolo passivo a temperatura T e si avrebbe quindi densità di potenza pari a $G_u = \frac{KT}{2}$.

Trattandosi di un attenuatore, il dispositivo sarà caratterizzato dalla relazione $P_u = \alpha P_i$ dove P_i e P_u rappresentano rispettivamente le potenze in ingresso e in uscita al doppio bipolo, mentre la quantità $\frac{1}{\alpha}$ è detta *attenuazione* e risulta $\alpha < 1$. Il legame appena descritto fra le potenze vale per linearità anche fra le densità di potenza dato che α è costante; si ha dunque

$$G_i(f) = \frac{KT}{2} \frac{1}{\alpha} = \frac{KT}{2} (T + T_{eq})$$

dove ovviamente T indica la temperatura a cui è posto il dispositivo e T_{eq} rappresenta la temperatura equivalente; quest'ultima è data da

$$T_{eq} = \frac{T}{\alpha} - T = T\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = T\left(\frac{1 - \alpha}{\alpha}\right)$$

Nel caso sia $\alpha = 1$, ossia qualora il doppio bipolo sia in realtà un puro collegamento, la temperatura equivalente risultante è nulla, giustificazione del fatto che non vi sono componenti resistive. Se invece $\alpha = 0,1$ si vede che $T_{eq} = 9T$: il doppio bipolo introduce del rumore e se il segnale diventa un decimo sicuramente si ha una grossa perdita di qualità dell'informazione; a dimostrazione di questo fatto la temperatura equivalente risulta molto alta.

Esempio applicativo di attenuatore passivo In Figura 11.3 è schematizzato un sistema di ricezione di segnali radio ottenuto attraverso due differenti configurazioni, A e B. La prima configurazione prevede l'utilizzo di un'antenna collegata direttamente ad un ricevitore; i cavi che collegano questi due dispositivi sono modellizzati come un attenuatore passivo dato che essenzialmente si tratta di un componente esclusivamente resistivo. In configurazione B, invece, viene inserito un amplificatore appena dopo l'antenna, al fine di ottenere un miglior risultato finale in fatto di rapporto segnale/rumore in uscita dall'impianto di ricezione. Per quanto riguarda i dati del sistema, la costante α è pari a 0,8, la temperatura del cavo è pari a $T_0 = 300K$, la temperatura equivalente del ricevitore è $T_{eq} = 600K$ mentre la costante di amplificazione di potenza è $A = 4$. Ci si chiede quale debba essere la temperatura equivalente dell'amplificatore affinché sia conveniente introdurlo.

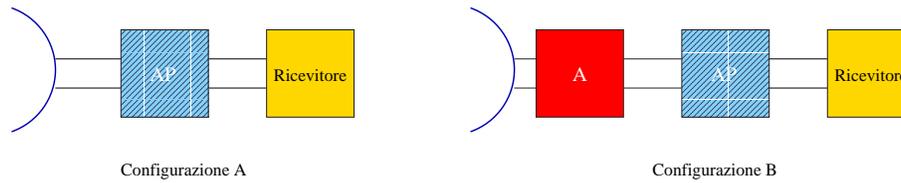


Figura 11.3: Sistema ricezione segnali audio

La temperatura equivalente del cavo è data da

$$T_{eq_{cavo}} = 300 \left(\frac{1 - 0,8}{0,8} \right) = 75K$$

e quindi la temperatura equivalente totale nel caso della configurazione A risulta pari a

$$T_{eq_A} = 75 + \frac{600}{0,8} = 825K$$

Nel caso della configurazione B, invece, la temperatura equivalente calcolata ai morsetti dell'antenna risulta pari a

$$T_{eq_B} = T_{eq_{Amp1}} + \frac{75}{4} + \frac{600}{4 \cdot 0,8} = T_{eq_{Amp1}} + 206,25$$

Dalle relazioni appena scritte è facile dedurre che l'utilizzo dell'amplificatore sarà conveniente solo nel caso la sua temperatura equivalente sia significativamente inferiore a $600K$ ossia esso sia realizzato con tecnologia migliore di quella utilizzata per il ricevitore. Si nota inoltre che al crescere dell'attenuazione di segnale dovuta al cavo diviene sempre più conveniente l'utilizzo dell'amplificatore.

11.3 Sistemi di trasmissione analogica

Le problematiche legate alla trasmissione dei segnali nascono dalla constatazione che i segnali stessi non sono adatti ad essere trasmessi così come nascono; è necessario cambiare la frequenza dei segnali, ad esempio moltiplicandoli per una funzione coseno che ne trasli la banda in frequenza in corrispondenza della posizione dei due impulsi costituenti la trasformata di Fourier del coseno.

11.3.1 Modulazione di ampiezza

La Figura 11.4 mostra un sistema di trasmissione-ricezione che si serve della *modulazione di ampiezza*: l'ampiezza istantanea del segnale da trasmettere, infatti, varia a causa della moltiplicazione per un segnale cosinusoidale detto *portante*. Esistono anche tecniche di *modulazione di frequenza* e di *modulazione di fase*.

Nel caso in Figura 11.4 si assume la portante pari a $\cos(2\pi f_0 t)$; il segnale $u(t)$ risultante, pari a $u(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t)$ viene effettivamente trasmesso e poi ricevuto dal ricevitore che nella configurazione mostrata in figura è detto *demodulatore coerente* poiché la portante utilizzata in fase di ricezione è esattamente la stessa usata in fase di trasmissione. Dal punto di vista operativo, per la ricezione il segnale $u(t)$ viene nuovamente moltiplicato per la portante (e per un coefficiente 2 al fine di semplificare i conti), ottenendo $2u(t)\cos^2(2\pi f_0 t) = m(t)(1 + \cos(2\pi 2f_0 t))$. Quest'ultimo

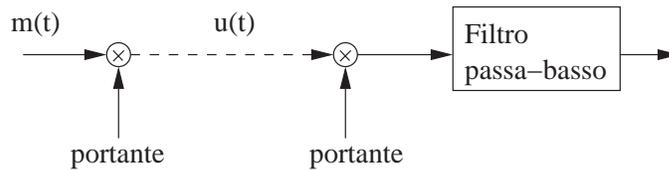


Figura 11.4: Trasmissione in modulazione di ampiezza con demodulatore coerente

segnale viene poi fatto passare attraverso un filtro passa-basso al fine di eliminare le repliche di $m(t)$ presenti a frequenze $f = \pm 2f_0$, ottenendo il solo segnale $m(t)$ che è quanto si voleva originariamente trasmettere.

Il demodulatore coerente appena descritto non presenta particolari problematiche legate alla realizzazione del filtro passa-basso dato che tipicamente f_0 viene scelta piuttosto elevata, tuttavia i limiti di questo demodulatore sono legati al fatto che è strettamente necessario servirsi di una portante uguale a quella utilizzata in trasmissione: una minima differenza di fase o di frequenza fra le due portanti genera infatti un'errata demodulazione del segnale in ricezione. Si consideri inoltre che una certa differenza di fase fra le due portanti è quasi inevitabile a causa dell'inevitabile ritardo causato dalla distanza fisica fra le due parti di trasmissione e ricezione.

La soluzione ideale di questo problema richiederebbe di non utilizzare un segnale di portante o per lo meno di utilizzarlo ma trasportarlo insieme al segnale stesso. A tal fine una soluzione per la realizzazione di un ricevitore prevedrebbe l'utilizzo dei seguenti elementi in cascata:

- un blocco non lineare che effettua il quadrato del segnale $u(t)$ ricevuto
- un filtro centrato a frequenza $f = 2f_0$
- uno squadratore che trasforma l'onda in ingresso in un'onda quadra
- un divisore di frequenza a passo 2 che dimezza la frequenza del segnale; realizzabile ad esempio con un *Flip-Flop* di tipo D
- un filtro centrato a frequenza $f = f_0$

La motivazione per l'utilizzo di un blocco non lineare che per primo riceve il segnale $m(t)$ viene dal fatto che per recuperare la portante occorrerebbe servirsi di un filtro che lasci passare solo le componenti a frequenza $f = \pm f_0$; tuttavia a meno della presenza a quelle frequenze di impulsi nel segnale $m(t)$ ricevuto, non si riesce a ricostruire niente in uscita poiché l'area fatta passare dal filtro è praticamente infinitesima. Ne segue che si deve necessariamente ricorrere all'utilizzo di particolari espedienti e di un blocco non lineare.

La complessità del sistema di ricezione appena descritto è pressapoco pari a quella del trasmettitore; questo fatto rappresenta una notevole limitazione qualora si sia interessati ad applicazioni quali la diffusione di onde radio in modalità *broadcast*: in casi come questo infatti si è disposti a spendere qualcosa in più per il trasmettitore ma si cerca necessariamente di risparmiare sui numerosi ricevitori necessari.

La soluzione alternativa per la trasmissione e ricezione di segnali finalizzati ad applicazioni come quella appena descritta prevede innanzi tutto l'utilizzo di segnali in ingresso esclusivamente positivi. Per poter soddisfare sempre questa condizione occorre spendere della potenza per trasformare i segnali. Procedendo alla modulazione dei segnali in ingresso con una portante sinusoidale si ottiene il segnale mostrato

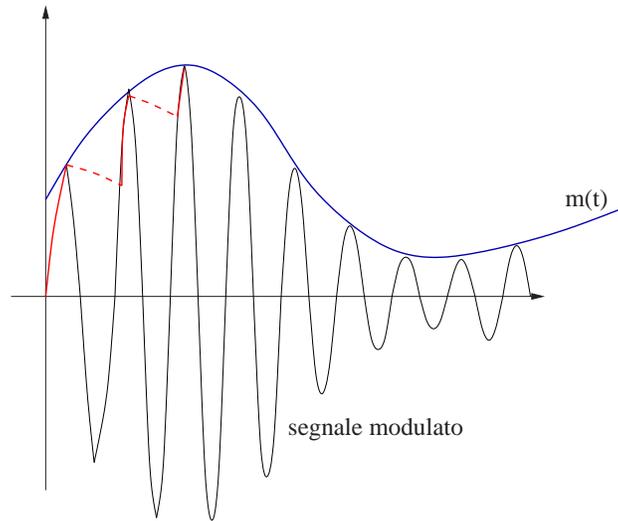


Figura 11.5: Demodulatore per applicazioni di diffusione

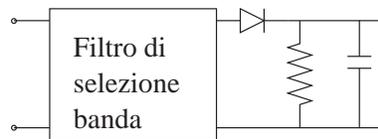


Figura 11.6: Schema demodulatore per applicazioni di diffusione

in nero Figura 11.5. In fase di ricezione, poi, si utilizza un demodulatore composto da un filtro di selezione della banda seguito da un diodo e da un circuito RC così come è mostrato in Figura 11.6; il segnale in uscita dal demodulatore è ottenuto attraverso il susseguirsi di due fasi:

1. Diodo in conduzione: il valore del segnale modulato supera la tensione che cade sul condensatore e di conseguenza il diodo è in conduzione e il condensatore si carica. Il segnale prodotto durante questa fase è indicato in rosso con linee continue in Figura 11.5.
2. Diodo interdetto: il segnale in ingresso ha valore inferiore alla tensione ai capi del condensatore e quindi il diodo non conduce; il condensatore, però si scarica lentamente sull'uscita e di conseguenza il valore registrato in uscita non va immediatamente a zero. Il segnale prodotto in questa fase è mostrato in rosso con linee tratteggiate in Figura 11.5.

Si può notare che il segnale ottenuto in ricezione è abbastanza simile al segnale $m(t)$ trasmesso, soprattutto nel caso siano tarati al meglio i parametri che controllano la durata della scarica del condensatore. In definitiva, quindi, si ottiene in uscita un segnale pari a $m(t) + k$ dove k è una certa costante; il tutto ovviamente senza servirsi di portanti e con una complessità del ricevitore relativamente bassa. Si noti che è importante che il segnale di partenza sia reso completamente positivo perché se così non fosse si ricostruirebbe il modulo del segnale di interesse.

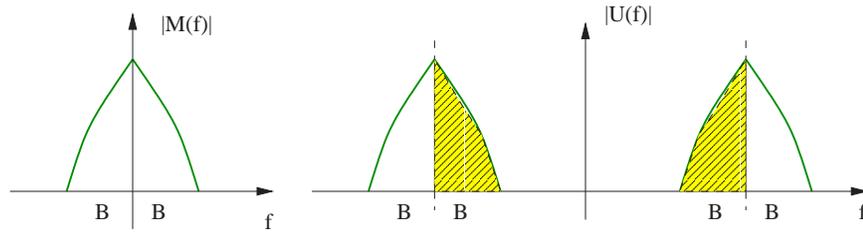


Figura 11.7: Banda con modulazione di ampiezza

11.3.2 Tecniche di ottimizzazione dell'uso della banda

Osservando le trasformate di Fourier del segnale $m(t)$ e della sua versione modulata $u(t)$ è facile notare che la banda occupata viene raddoppiata passando da $M(f)$ a $U(f)$ poiché la trasformata del coseno è composta da due impulsi che sdoppiano il segnale di partenza. In Figura 11.7 è mostrata la situazione.

Si ha quindi che attraverso la modulazione in ampiezza la banda trasmessa viene raddoppiata; spesso questo fatto è tutt'altro che interessante e si ricorre quindi a tecniche per ridurre la banda occupata.

Dato che le informazioni trasmesse sono esattamente il doppio di quelle strettamente necessarie, è possibile cancellare la parte di segnale evidenziata in giallo tratteggiato in Figura 11.7 mantenendo comunque il segnale reale (poiché rimane la simmetria in frequenza) e potendo ricostruire correttamente il segnale originale. Questa soluzione prende il nome di *trasmissione in banda laterale unica*. Tuttavia essa risulta di difficile realizzazione pratica poiché è difficile implementare un filtro che elimini esattamente le zone precedentemente indicate; si ottengono quindi, in genere, soluzioni con *banda laterale parzialmente soppressa*.

Un meccanismo alternativo per ridurre le inefficienze dovute al raddoppio di banda è quello di trasmettere contemporaneamente due segnali nella stessa banda; ciò è possibile modulando due segnali $u_1(t)$ e $u_2(t)$ con due portanti diverse, $\cos(2\pi f_0 t)$ e $\sin(2\pi f_0 t)$ e poi trasmettendoli assieme; se non si compiono errori nell'utilizzo delle portanti, in fase di ricezione è possibile separare i due segnali semplicemente rimoltiplicando il segnale somma per una o per l'altra portante e passando quanto ottenuto nel solito filtro passa-basso (demodulatore coerente).

11.3.3 Influenza del rumore

Si intende ora calcolare a quanto ammonti l'influenza del rumore su un sistema di trasmissione con modulazione di ampiezza; per fare ciò si calcola il rapporto segnale/rumore.

Si consideri ad esempio un segnale $m(t) = \sqrt{2}A \cos(2\pi f_m t)$; tale segnale viene poi modulato moltiplicandolo una funzione cosinusoidale $\cos(2\pi f_0 t)$ ottenendo quindi $u(t) = \sqrt{2}A \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_0 t)$. In ricezione giungerà questo segnale $u(t)$, ma ad esso sarà sommato sicuramente un certo rumore (dovuto alla trasmissione) $n(t)$ che qui viene assunto bianco e con densità spettrale di potenza costante pari a $G_n(f) = \frac{\eta}{2}$.

Il segnale trasmesso può essere riscritto anche come

$$u(t) = \frac{A}{\sqrt{2}} \cos[2\pi(f_m + f_0)t] + \frac{A}{\sqrt{2}} \cos[2\pi(f_0 - f_m)t]$$

e quindi la potenza media di segnale in ingresso al ricevitore sarà pari a

$$S_i = \frac{1}{2} \left(\frac{A^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{A^2}{2} \right) = \frac{A^2}{2}$$

In ricezione viene usato un demodulatore coerente e quindi il segnale $u(t)$ viene rimoltiplicato per la portante (in realtà come già detto, per $2 \cos(2\pi f_0 t)$) e si ottiene quindi una componente di segnale che vale $\sqrt{2}A \cos(2\pi f_m t) \cos^2(2\pi f_0 t) = \sqrt{2}A \cos(2\pi f_m t) + \dots$ in cui è stato ommesso l'addendo dipendente dalla frequenza della portante poiché come già detto in seguito il segnale viene fatto passare attraverso un filtro passa-basso di modo da ottenere solo $m(t)$.

La potenza media di segnale in uscita risulta quindi pari a

$$S_o = \frac{(\sqrt{2}A)^2}{2} = A^2$$

Per quanto riguarda invece la componente di rumore, si pensa di scomporre $n(t)$

$$n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_0 t) + n_s(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

dove $n_c(t)$ e $n_s(t)$ risultano anch'essi rumori bianchi ma hanno densità spettrale di potenza doppia rispetto a $n(t)$, ossia

$$G_{n_c}(f) = G_{n_s}(f) = \eta$$

Poiché il tutto segnale (componente di segnale più componente di rumore) viene demodulato attraverso una funzione cosinusoidale, la componente di rumore che si ottiene in uscita deriva solo da $n_c(t)$. E' quindi possibile calcolare il rapporto segnale/rumore in uscita che vale

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{A^2}{\eta \cdot 2f_m} = \frac{\frac{A^2}{2}}{\frac{\eta}{2} 2f_m} = \frac{S_i}{N_i}$$

in cui si è calcolata la potenza media di rumore integrando la densità spettrale di rumore sulla banda di interesse, ossia da $-f_m$ a $+f_m$; come si nota dalla relazione appena scritta, il rapporto segnale/rumore in uscita è pari a quello che si aveva in ingresso al ricevitore. Ne segue quindi che con la tecnica di modulazione in ampiezza si ha necessariamente lo stesso rapporto segnale/rumore che si avrebbe se fosse possibile trasmettere in *banda base* (ossia senza spostare il segnale in frequenza); in questo caso non è quindi lasciata alcuna libertà di progettazione sul rapporto $\frac{S}{N}$.

11.3.4 Modulazione di frequenza

Come accennato precedentemente, è possibile modulare in frequenza un segnale da trasmettere; la portante da utilizzare è data da

$$v(t) = A \cos(2\pi f_c t + \phi(t))$$

in cui il termine $\phi(t)$ è legato al segnale $m(t)$ che si intende modulare. Infatti perché valga la modulazione in frequenza serve che sia

$$\frac{d}{dt} \phi(t) = k_1 m(t)$$

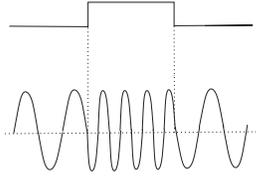


Figura 11.8: Andamento di un segnale al variare della frequenza

Qualora invece si desideri avere una modulazione di fase dovrà valere

$$\phi(t) = k_2 m(t)$$

E' poi possibile calcolare la frequenza istantanea della portante che risulta pari a

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (2\pi f_c t + \phi(t)) = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t)$$

Per ottenere praticamente una portante da modulatore di frequenza si utilizza un circuito LC con un condensatore a capacità variabile (ad esempio realizzato con un diodo inversamente polarizzato).

Essenzialmente, quindi, per ottenere la modulazione di frequenza invece di modificare l'ampiezza della portante se ne modifica la frequenza in base al segnale in ingresso (modulante) $m(t)$; in Figura 11.8 è mostrato un esempio di andamento del segnale in uscita al variare della frequenza. Si noti che questa tecnica risulta maggiormente immune ai disturbi poiché la natura del segnale dipende solo dai passaggi per lo zero della forma d'onda; il rumore è di natura additiva e non influenza la frequenza del segnale.

Il segnale modulato in uscita è dato da

$$v(t) = A \cos[2\pi f_c t + k \int_{-\infty}^t m(t) dt]$$

che assumendo $m(t)$ con andamento sinusoidale risulta pari a

$$v(t) = A \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$$

dove f_m indica la frequenza massima del segnale modulante considerato.

Si può quindi calcolare la frequenza istantanea che risulta

$$f_{ist} = f_c + \frac{\beta 2\pi f_m}{2\pi} \cos(2\pi f_m t) = f_c + \beta f_m \cos(2\pi f_m t)$$

La massima variazione della frequenza istantanea è $\Delta f = \beta f_m$ e quindi si può definire *indice di modulazione* la quantità $\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$.

Dato che il segnale modulato può essere scritto anche come

$$\begin{aligned} v(t) = & J_0(\beta) \cos(\omega_c t) - J_1(\beta) [\cos(\omega_c - \omega_m)t + \cos(\omega_c + \omega_m)t] + \\ & + J_2(\beta) [\cos(\omega_c - 2\omega_m)t + \cos(\omega_c + 2\omega_m)t] + \dots \end{aligned}$$

in cui i termini $J_i(\beta)$ sono funzioni di Bessel di primo tipo; si noti come il segnale modulato sia quindi esprimibile come somma di infinite componenti a frequenze del

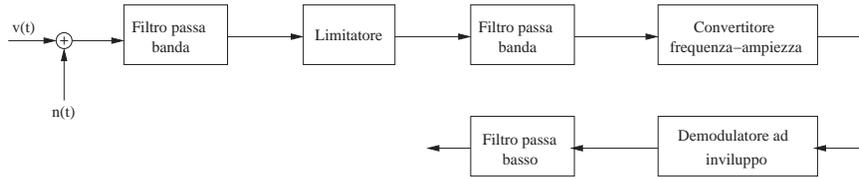


Figura 11.9: Schema a blocchi per la ricezione di segnali modulati in frequenza

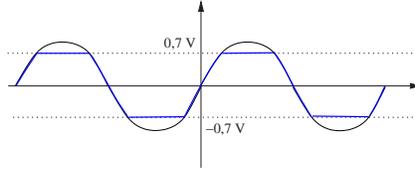


Figura 11.10: Funzionamento del limitatore

tipo $\omega_c + n\omega_m$ e occupi di conseguenza l'intero spettro di frequenze. In realtà però la banda all'interno del quale l'ampiezza del segnale è significativa risulta pari a $B = 2(\Delta f + f_m)$, *banda di Carson*.

In Figura 11.9 è mostrato lo schema a blocchi per la ricezione di segnali modulati in frequenza; viene utilizzato prima di tutto un blocco passa-banda per selezionare la banda di interesse, poi un limitatore provvede a ridurre l'ampiezza del segnale così come mostrato in Figura 11.10. Tale limitatore viene realizzato nella pratica attraverso dei diodi. A questo punto il segnale viene fatto passare attraverso un ulteriore filtro passa-banda al fine di eliminare le armoniche indesiderate generate dal limitatore. Il passo successivo prevede che il segnale, che è modulato in frequenza, venga modulato anche in ampiezza: si utilizza quindi un convertitore frequenza-ampiezza con modulo della funzione di trasferimento lineare in frequenza. Ad esempio un blocco derivatore con $H(f) = j2\pi f$ soddisfa questa condizione.

Per completare la ricezione del segnale viene utilizzato un *demodulatore ad involuppo* (realizzato ad esempio con un diodo seguito da un circuito RC) e un filtro passa-basso.

Si trova che il rapporto segnale-rumore è dato da

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{3}{2}\beta^2 \frac{S_i}{N_i}$$

con $\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$; da questa relazione si deduce che nel caso della modulazione in frequenza è possibile ottenere in uscita un rapporto segnale-rumore migliore di quello in ingresso utilizzando banda larga e di conseguenza Δf grande. In Figura 11.11 Z è mostrato l'andamento del rapporto segnale-rumore; si noti che sotto certi valori di $\frac{S_i}{N_i}$ il rapporto segnale-rumore in uscita degrada molto fino a raggiungere valore pari a $\frac{S_i}{N_i}$.

Uno dei principali problemi legati alla modulazione di frequenza è quello che la densità spettrale di potenza del rumore varia come il quadrato della frequenza e di conseguenza le componenti del segnale a frequenza più alte vengono trattate peggio. Per questo motivo si sceglie spesso di utilizzare anche modulazioni di fase.

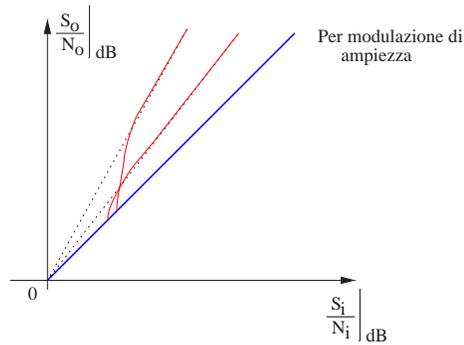


Figura 11.11: Andamento del rapporto segnale rumore

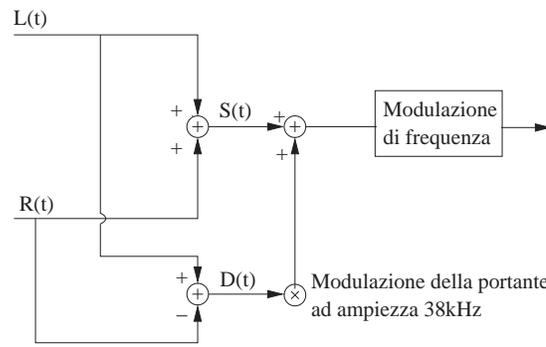


Figura 11.12: Trasmettitore FM

11.3.5 Segnale radio FM

La modulazione di frequenza ha una delle sue principali applicazioni nelle trasmissioni radiofoniche. Si considerino due segnali $R(t)$ e $L(t)$, rispettivamente il canale destro e sinistro di un segnale radio; tali segnali abbiano banda pari a 15 kHz . In Figura 11.12 W è mostrato lo schema del trasmettitore FM; i due segnali vengono sommati e sottratti; la differenza viene moltiplicata per una portante a 38 kHz al fine di modularla in ampiezza. In seguito la somma dei segnali e la differenza modulata in ampiezza vengono a loro volta sommate e modulate in frequenza. Ovviamente per la ricezione del segnale si provvederà prima a demodulare in frequenza e poi in ampiezza.

Lo spettro del segnale risultante dalla modulazione è mostrato in Figura 11.13 ; la somma dei segnali $L(t)$ e $R(t)$ si estende da 0 a 15 kHz mentre la differenza modulata è centrata a 38 kHz e si estende da 23 a 53 kHz . Per poter trasportare le informazioni sulla portante del segnale viene aggiunto un tono a 19 kHz .

Si noti come ad alta frequenza venga trasmessa la differenza fra i due segnali che ovviamente è la parte meno importante e che trasporta meno informazioni; di conseguenza eventuali rumori alle alte frequenze generano un piccolo decadimento della qualità generale del segnale.

Qualora il tono a 19 kHz venga ricevuto corrotto a causa del rumore, il sistema evita volutamente di decodificare le informazioni relative alla differenza dei due segnali destro e sinistro; il segnale demodulato risulta quindi non stereofonico bensì in mono.

Valori tipici per l'escursione massima di frequenza e la banda sono $B = 200\text{ kHz}$

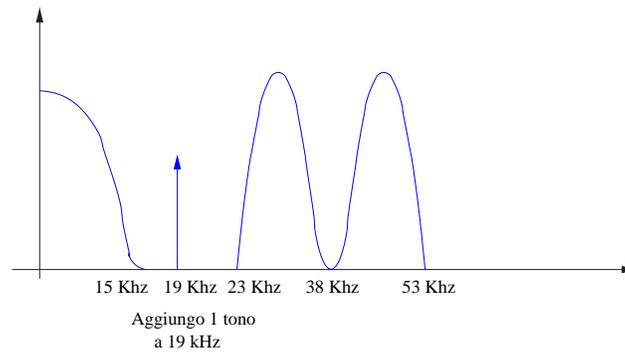


Figura 11.13: Spettro del segnale risultante

e $\Delta f = 75\text{KHz}$; tali valori permettono di ottenere una qualità del segnale radio FM decisamente migliore di quella ottenibile con un sistema AM (modulazione di ampiezza).

Capitolo 12

Trasmissione di segnali numerici

12.1 Trasmissione numerica in banda base

Lo schema a blocchi di un sistema di trasmissione binario può essere schematizzato come in Figura 12.1; $s(n)$ rappresenta la sequenza di informazioni binarie da trasmettere. Il periodo di trasmissione associato ad un bit sarà indicato con T , la frequenza di bit (numero di bit trasmessi al secondo) è invece rappresentata con $\frac{1}{T}$. Il segnale che si ha in uscita dal generatore di forme d'onda $s_T(t)$ può essere rappresentato come

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [a(n)g_1(t - nT) + b(n)g_2(t - nT)]$$

Ad ogni simbolo (bit) viene associata una forma d'onda, essa è rappresentata da $g_1(t)$ se $a(n) = 1$ e $b(n) = 0$, $g_2(t)$ se $a(n) = 0$ e $b(n) = 1$, queste forme d'onda base sono dette spesso impulsi elementari. Il mezzo trasmissivo è rappresentabile associandolo ad una funzione di trasferimento $H_{MT}(f)$. Se il sistema trasmissivo è *ideale* essa è invariante nel tempo e costante in modulo in frequenza $H_{MT}(f) = H_0 e^{-j2\pi f\tau}$, in generale il nostro sistema sarà dissipativo pertanto abbiamo $H_0 < 1$. Quanto detto deve essere valido nell'intervallo di frequenze di interesse, se tale intervallo è centrato attorno all'origine avremo un mezzo trasmissivo passa-basso, mentre se è centrato attorno a due frequenze simmetriche $+f_0$ e $-f_0$ sarà passa-banda. In realtà molto frequentemente i mezzi trasmissivi si discostano dall'essere ideali, ad esempio perché il legame ingresso uscita non può essere considerato lineare (anche se questa è certamente una buona approssimazione) oppure perché non si può assumere che il sistema sia tempo-invariante (avrà in questo caso una risposta all'impulso dipendente dal tempo). Un buon metodo per approssimare un mezzo trasmissivo ideale è quello di porre a valle del blocco rappresentante il mezzo trasmissivo un equalizzatore, tale configurazione è rappresentata in Figura 12.2.



Figura 12.1: Sistema di trasmissione binario

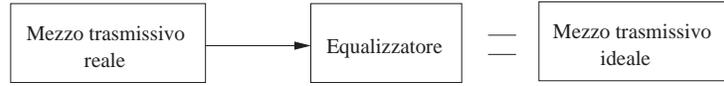


Figura 12.2: Cascata di un mezzo trasmissivo reale e di un equalizzatore

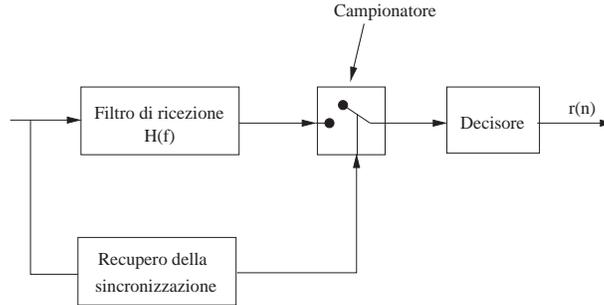


Figura 12.3: Schema a blocchi del ricevitore

Consideriamo ora come possa essere realizzato il *ricevitore*. Lo schema a blocchi è rappresentato in Figura 12.3, il blocco denominato *decisore* decide, in base ai valori letti, se è stato trasmesso uno 0 o un 1.

Osserviamo dalla Figura 12.3 che si hanno due canali in parallelo: uno per recuperare i bit trasmessi, l'altro per recuperare le informazioni di sincronizzazione. Tutti i disturbi di tipo trasmissivo presenti nel sistema $n(t)$ sono schematizzati, dal punto di vista sistemistico come un unico contributo additivo all'ingresso del ricevitore numerico, come mostrato in Figura 12.4. In particolare assumiamo il termine $n(t)$ come schematizzabile attraverso un processo con densità di probabilità delle ampiezze di tipo *gaussiano, stazionario*, a media nulla e *bianco*, cioè con densità spettrale di potenza costante a tutte le frequenze $G_n(f) = \frac{\eta}{2}$. Analizziamo ora gli effetti che questo rumore ha sulle prestazioni del sistema. In particolare vogliamo studiare le differenze statistiche tra la sequenza inviata $s(n)$ e la sequenza ricevuta $r(n)$. La sequenza $r(n)$ può essere rappresentata come $r(n) = s(n) \oplus e(n)$ (il simbolo \oplus rappresenta lo XOR logico), ovviamente $e(n)$ varrà 1 in presenza di un errore, 0 in caso contrario. Ipotizzando che gli errori siano *indipendenti* l'uno dall'altro è possibile esprimere tutte le caratteristiche statistiche del rumore $e(n)$ attraverso la probabilità che il simbolo ricevuto sia errato $p(\varepsilon)$.

Per ipotesi tralasciamo gli errori dovuti ad una cattiva sincronizzazione. Osserviamo innanzitutto che il mezzo trasmissivo dovrà avere una banda limitata per lasciarne libera per altre trasmissioni, esso viene però eccitato con impulsi a banda approssimativamente illimitata. Pertanto anche se le forme d'onda hanno una lunghezza rigorosamente minore del periodo di trasmissione in uscita gli impulsi si allargano, come mostrato in Figura 12.5, e quindi leggo dei segnali la cui ampiezza dipende da tanti impulsi. Chiamiamo tale errore di *interferenza intersimbolica*. Vanno dunque gestiti due errori di tipo diverso, il rumore noto da un punto di vista puramente

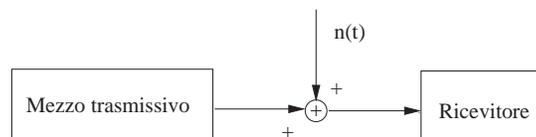


Figura 12.4: Errore in ingresso al ricevitore

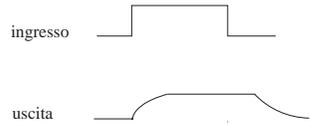


Figura 12.5: Errore di interferenza intersimbolica

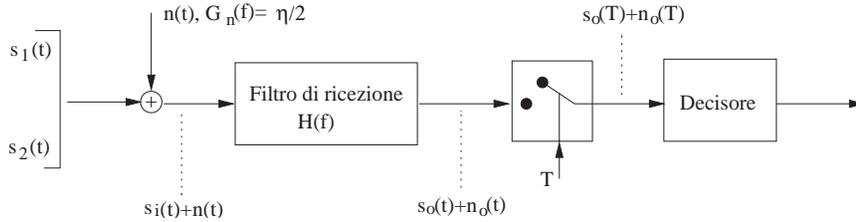


Figura 12.6: Schema a blocchi del sistema di ricezione con rappresentazione degli errori

statistico e quello dovuto all'interferenza intersimbolica di cui si conosce praticamente tutto. Vogliamo minimizzare gli effetti di questi due errori sulla sequenza di bit ricevuti, trattiamo i due errori separatamente.

I problemi di interferenza intersimbolica possono essere annullati trasmettendo un solo bit per volta oppure abbassando la frequenza fino a quando anche l'ampiezza del segnale in uscita dipenda da un solo impulso. Assumiamo dunque di trasmettere un unico bit ed analizziamo il disturbo dovuto unicamente al rumore, il sistema a blocchi che schematizza la situazione che stiamo trattando è mostrato in Figura 12.6. La densità di probabilità delle ampiezze del processo $s_0(t) + n_0(t)$ è ancora gaussiana ed il processo rimane stazionario, poiché l'errore $n(t)$ con densità di probabilità delle ampiezze gaussiana passa attraverso un sistema lineare e quindi mantiene sia la stazionarietà che le caratteristiche riguardanti la densità di probabilità come mostrato nel paragrafo 10.2, la sua densità spettrale di potenza vale $G_{n_0}(f) = \frac{\eta}{2} |H(f)|^2$. L'errore $n_0(T)$ è quindi una variabile aleatoria gaussiana a media nulla, la sua densità di probabilità di ampiezze è espressa da $f_{n_0(T)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{n_0(T)^2}{2\sigma_0^2}}$. Questa situazione è già stata descritta trattando i metodi di decisione a massima probabilità a posteriori o a massima verosimiglianza. Assumiamo che i due segnali binari '0' ed '1' abbiano la stessa probabilità di emissione $P(1) = P(0) = \frac{1}{2}$. Nella Figura 12.7 sono riportate le densità di probabilità della variabile $s_0(T) + n_0(T)$ condizionate al fatto che sia stato trasmesso 1 quindi ricevuto in assenza di disturbo $s_1(t)$ o 0 e quindi ricevuto in assenza di disturbo $s_2(t)$. Se la probabilità di avere trasmesso '1' è uguale a quella di avere trasmesso '0', la soglia di decisione è ovviamente posta a metà tra i valori $s_{01}(T)$ e $s_{02}(T)$ e corrisponde a $\bar{s} = \frac{s_{01}(T) + s_{02}(T)}{2}$. Nel caso i simboli di emissione non siano equiprobabili la soglia di decisione dovrà essere opportunamente modificata. Facendo riferimento alla Figura 12.7, la probabilità di aver trasmesso un '1' e ricevuto uno '0' è data dall'area tratteggiata, il caso opposto sarà dato dall'area speculare rispetto alla soglia di decisione. La probabilità totale di errore $p(\varepsilon)$ sarà

$$P(\varepsilon) = P(ric = 1|tr = 0)P(0) + P(ric = 0|tr = 1)P(1) = P(ric = 0|tr = 1) = P(ric = 1|tr = 0) = \int_{\frac{s_{01}(T) - s_{02}(T)}{2}}^{+\infty} f_{n_0(T)}(n_0) dn_0 = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{s_{01}(T) - s_{02}(T)}{2} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_0} \right]$$

L'estremo dell'integrale è $\Delta = \frac{s_{01}(T) - s_{02}(T)}{2}$ poiché guardo la gaussiana centrata in $s_{02}(T)$ e quindi va considerato l'intervallo tra Δ e ∞ . Il filtro di ricezione andrà

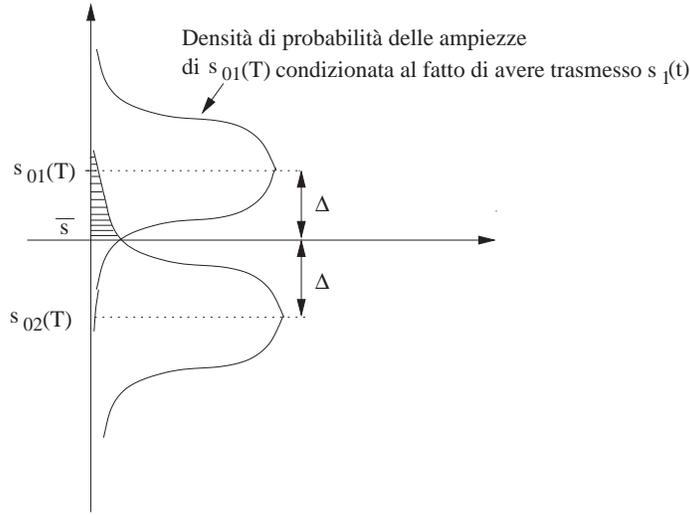


Figura 12.7: Densità di probabilità della variabile aleatoria in uscita dal campionatore

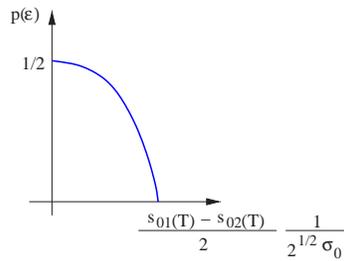


Figura 12.8: Grafico della probabilità di errore in funzione dell'argomento dell'error function complementare

ottimizzato per rendere minima la probabilità di errore $P(\varepsilon)$. Nel grafico di Figura 12.8 rappresentiamo la probabilità totale di errore di $P(\varepsilon)$ in funzione dell'argomento dell'*error function complementare*. Si può facilmente vedere che per minimizzare la probabilità va massimizzato il rapporto $\gamma = \frac{s_{01}(T) - s_{02}(T)}{\sigma_0}$ oppure in modo equivalente $\gamma^2 = \frac{[s_{01}(T) - s_{02}(T)]^2}{\sigma_0^2} = \frac{p_0(T)^2}{\sigma_0^2}$ dove indichiamo con $p_0(t) = s_{01}(t) - s_{02}(t)$ e con $P_0(f)$ la sua trasformata di Fourier. Ponendo inoltre $p(t) = s_1(t) - s_2(t)$ e indicando con $P(f)$ la trasformata di Fourier abbiamo

$$p_0(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_0(f) e^{j2\pi fT} df = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) H(f) e^{j2\pi fT} df$$

$$\sigma_0^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{n0}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(f) |H(f)|^2 df$$

e quindi

$$\gamma^2 = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} P(f) H(f) e^{j2\pi fT} df \right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} G_n(f) |H(f)|^2 df}$$

Osserviamo che i parametri non determinati sono $H(f)$ e T , essi vanno scelti in modo da massimizzare γ^2 . In realtà solo $H(f)$ può essere fissato liberamente, T è poi fissato di conseguenza in modo da non perdere la causalità del sistema. Ricordando

la disuguaglianza di Schwartz

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f)df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df$$

per la quale vale il segno di uguaglianza solo se $X(f) = kY^*(f)$. Poniamo

$$\begin{aligned} X(f) &= \sqrt{G_n(f)}H(f) \\ Y(f) &= \frac{1}{\sqrt{G_n(f)}}P(f)e^{j2\pi fT} \end{aligned}$$

si ha quindi che γ^2 vale

$$\gamma^2 = \frac{p_0(T)^2}{\sigma_0^2} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f)df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|P(f)|^2}{G_n(f)} df$$

il segno di uguaglianza vale quando $H(f) = k \frac{P^*(f)}{G_n(f)} e^{-j2\pi fT}$. Nel caso di rumore bianco $G_n(f) = \frac{\eta}{2}$ il filtro ottimo, cioè quello che minimizza la probabilità di errore è detto *filtro adattato (alla differenza dei segnali in ingresso)*

$$H(f) = k \frac{P^*(f)}{\frac{\eta}{2}} e^{-j2\pi fT}$$

tale funzione di trasferimento è legata alla trasformata di Fourier dei due segnali in ingresso. Possiamo ricavare facilmente $h(t)$ applicando la formula di antitrasformata

$$h(t) = \frac{k}{\frac{\eta}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} P^*(f) e^{-j2\pi fT} e^{j2\pi ft} df = \frac{k}{\frac{\eta}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} P^*(f) e^{j2\pi f(t-T)} df$$

Supponiamo di lavorare con segnali reali e con sistemi aventi risposta all'impulso reale, quindi $h(t) = h^*(t)$

$$h(t) = h^*(t) = \frac{k}{\frac{\eta}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) e^{j2\pi f(T-t)} df$$

la formula ottenuta è quella dell'antitrasformata di Fourier di $P(f)$ valutata in $(T-t)$

$$h(t) = h^*(t) = \frac{k}{\frac{\eta}{2}} p(T-t) = \frac{k}{\frac{\eta}{2}} p[-(t-T)]$$

la risposta all'impulso del filtro adattato è proporzionale all'andamento del segnale $p(T-t)$, rappresentiamo tale segnale in Figura 12.9. Dalla figura si può facilmente vedere che la scelta dell'istante di campionamento T è solo parzialmente libera. Scegliendo in modo inopportuno T la risposta all'impulso del filtro adattato non è causale. Per avere risposte causali essa deve essere nulla per istanti di tempo negativi, si deve cioè permettere al sistema di osservare tutto il segnale disponibile prima di prendere una decisione.

12.1.1 Variante al filtro adattato

Il filtro considerato finora è adattato alla differenza dei segnali in ingresso; è tuttavia possibile considerare la risposta all'impulso come composta dal contributo di due filtri adattati ai singoli segnali in ingresso; si ha quindi

$$h(t) = \frac{2k}{\eta} [s_1(T-t) - s_2(T-t)] = h_1(t) - h_2(t) = \frac{2k}{\eta} s_1(T-t) - \frac{2k}{\eta} s_2(T-t)$$

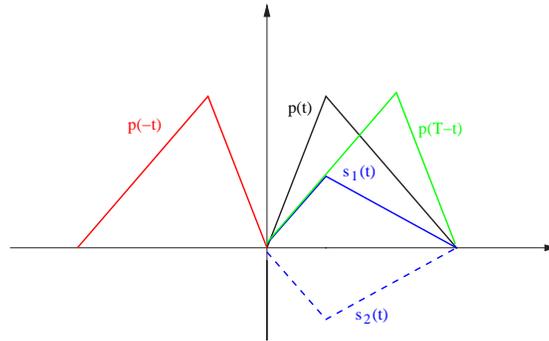


Figura 12.9: Andamento del segnale $p(T - t)$

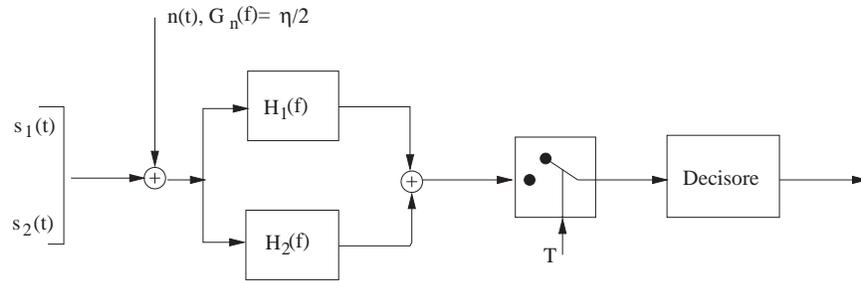


Figura 12.10: Variazione al filtro adattato, realizzato con due filtri adattati ai singoli segnali in ingresso

Si ottiene una configurazione come quella mostrata in Figura 12.10 in cui il precedente filtro adattato $H(f)$ è stato sostituito da un blocco lineare composto dal parallelo dei due filtri $H_1(f)$ e $H_2(f)$ adattati ai singoli segnali in ingresso. Le uscite dei filtri vengono sommate e in seguito campionate. Se invece si sceglie di campionare singolarmente le uscite dei filtri, si può utilizzare una nuova versione del blocco di decisione. Il decisore, infatti, sceglie come simbolo ricevuto quello a cui corrisponde la forma d'onda più significativa. Questa configurazione è mostrata in Figura 12.11.

E' possibile rappresentare il sistema di ricezione ottimo anche in un altro modo; il segnale in uscita al filtro $H(f)$ è pari alla convoluzione fra la risposta all'impulso

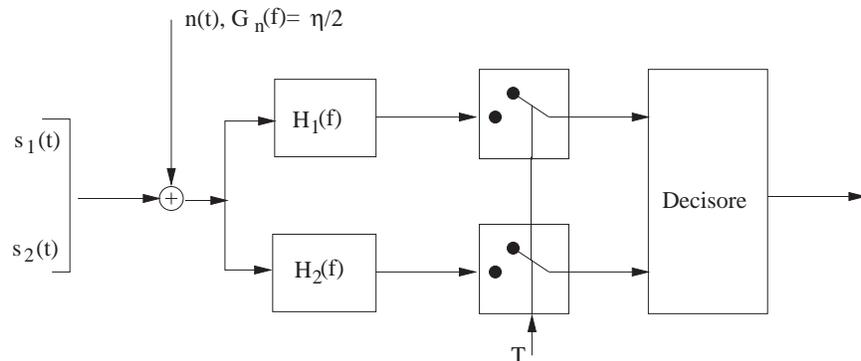


Figura 12.11: Campionamento singolo dei segnali in uscita dai filtri adattati

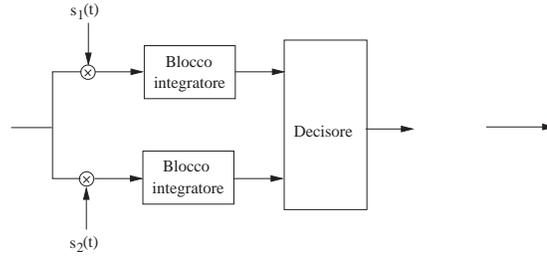


Figura 12.12:

del filtro stesso e il segnale in ingresso e risulta quindi

$$s_o(t) = s_i(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda$$

in cui il secondo termine presente nell'integrale è pari a

$$h(t - \lambda) = \frac{2k}{\eta}[s_1(T - t + \lambda) - s_2(T - t + \lambda)]$$

E' possibile ora calcolare il valore di $s_o(T)$ che risulta

$$\begin{aligned} s_o(T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_i(\lambda) \frac{2k}{\eta} (s_1(\lambda) - s_2(\lambda)) d\lambda = \\ &= \frac{2k}{\eta} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s_i(\lambda) s_1(\lambda) d\lambda - \int_{-\infty}^{+\infty} s_i(\lambda) s_2(\lambda) d\lambda \right] \end{aligned}$$

Con questa versione del filtro, mostrata in Figura 12.12 , il decisore si comporta in modo piuttosto intuitivo e sceglie il simbolo da mandare in uscita in base alla maggiore o minore correlazione di quanto riceve dai campionatori con quanti si sarebbe aspettato di ricevere in condizioni ideali (ossia le codifiche esatte di '0' e '1').

12.1.2 Probabilità d'errore per coppie notevoli di segnali

Si è visto che il filtro ideale di un sistema di trasmissione numerica di segnali è caratterizzato dalla risposta all'impulso

$$h(t) = \frac{2k}{\eta}[s_1(T - t) - s_2(T - t)] = \frac{2k}{\eta}p(T - t)$$

Il filtro adattato appena descritto è caratterizzato da minima probabilità d'errore quando la quantità

$$\gamma^2 = \left[\frac{\rho_o^2(t)}{\sigma_o^2} \right]$$

assume valore massimo; è possibile elaborare l'espressione di γ^2 ottenendo:

$$\gamma^2 = \frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = \frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 dt = \frac{2}{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t) - s_2(t)|^2 dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\eta} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s_1^2(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} s_2^2(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t) dt \right] = \\
&= \frac{2}{\eta} [E_1 + E_2 - 2E_{12}]
\end{aligned}$$

Per la seconda uguaglianza ci si è serviti del teorema di Parseval per passare dalla relazione nel dominio delle frequenze a quella nel dominio del tempo; con E_1 ed E_2 sono indicate le energie dei due segnali considerati, mentre E_{12} ne rappresenta l'energia incrociata.

Qualora si consideri una coppia di segnali antipodali, ossia del tipo $s_1(t) = -s_2(t)$, si ha un unico valore di energia pari a $E = E_1 = E_2$. Si ottiene quindi $\gamma_{max}^2 = \frac{8E}{\eta}$ e di conseguenza la probabilità d'errore risulta pari a

$$\begin{aligned}
p_{min}(\varepsilon) &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{p_o(T)}{2\sqrt{2}\sigma_o} \right]_{max} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{p_o^2(T)}{(2\sqrt{2})^2 \sigma_o^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{E}{\eta} \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Nel caso invece si consideri una coppia di segnali perpendicolari si ha che $E_1 = E_2 = E$ e inoltre $E_{12} = 0$; si ha quindi che $\gamma_{max}^2 = \frac{4E}{\eta}$ e quindi la probabilità d'errore risulta pari a

$$p(\varepsilon)_{min} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{E}{2\eta} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Infine, nel caso di una coppia di segnali unipodali, ossia del tipo $s_1(t)$ con energia E e $s_2(t) = 0$, si ha che $\gamma_{max}^2 = \frac{2E}{\eta}$ e quindi la probabilità d'errore risulta pari a

$$p(\varepsilon)_{min} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{E}{4\eta} \right]^{\frac{1}{2}}$$

E' interessante notare che il segnale $p(t) = s_1(t) - s_2(t)$ corrisponde alla distanza d fra i due segnali, come mostrato in Figura X. Nel caso di segnali unipodali la probabilità d'errore minima risulta quindi pari a

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{d^2}{4\eta} \right]^{\frac{1}{2}}$$

12.1.3 Interferenza intersimbolica

Si è visto finora come per garantire le massime prestazioni in presenza di rumore sia necessario utilizzare un filtro adattato per la ricezione di un singolo impulso che codifichi un dato binario. Nel caso venga trasmessa una sequenza di bit e quindi una sequenza di impulsi, possono sorgere problemi legati all'interferenza intersimbolica. Qualora la durata degli impulsi sia non superiore al tempo di bit T non vi sono problemi e la soluzione migliore rimane quella del filtro adattato. Si consideri ad esempio la situazione in cui vengano utilizzate come forme d'onda base rettangolari; in uscita al filtro adattato si ottiene una forma d'onda composta da

impulsi triangolari di lunghezza $2T$; ne segue che non vi è interferenza intersimbolica negli istanti di campionamento che cadono a multipli di T .

Supporre che all'ingresso del ricevitore vi siano impulsi elementari di lunghezza finita significa però imporre che la banda del mezzo trasmissivo debba essere infinita o comunque estremamente grande se confrontata con il tempo di bit (o di simbolo nei casi più generali). Nel caso questa ipotesi non sia verificata (come molto spesso accade) allora gli impulsi elementari avranno, all'ingresso del ricevitore, una lunghezza infinita o comunque estremamente più grande del tempo di bit. Ciò crea all'uscita del filtro adattato problemi di interferenza intersimbolica. Per risolverli occorre rinunciare all'utilizzo del filtro adattato e optare, come filtro di ricezione, per un filtro che garantisca *impulsi di Nyquist* in ingresso al campionatore.

12.1.4 Impulsi di Nyquist

Una condizione che può garantire l'assenza di interferenza intersimbolica pur avendo segnali in ingresso di lunghezza superiore a T è quella che valga per le forme d'onda

$$s(kT) = 0$$

per ogni $k \neq 0$. Con questo accorgimento non si ha interferenza intersimbolica poiché leggendo i valori trasmessi solo a multipli interi di T si ha la certezza che, nonostante il segnale sia nel complesso somma di numerose forme d'onda, il valore letto dipenderà solo dall'ultimo impulso, ossia quello per cui varrà $k = 0$. Un esempio di segnale che soddisfa il requisito in questione è il seno cardinale; tale segnale deve però essere leggermente modificato al fine di renderlo causale (si tagliano le code oltre un certo valore trascurabile e si sposta il segnale affinché tutto per tempi positivi).

La condizione nel tempo appena espressa si traduce nel campo delle frequenze nella condizione seguente (utilizzando la trasformata di Fourier):

$$s(kT) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi f k T} df = 0$$

sempre per ogni $k \neq 0$. L'integrale appena scritto può essere interpretato come quello che serve per calcolare i coefficienti della serie di Fourier, ammettendo di scambiare la frequenza col tempo. Ne segue che la periodicizzazione di $S(f)$ con passo $\frac{1}{T}$ deve avere $s(kT)$ come coefficiente della serie di Fourier, a meno di fattori di scala. Quindi si deduce che la periodicizzazione di passo $\frac{1}{T}$ deve essere una costante. Il segnale a rettangolo fra $-\frac{1}{2T}$ e $\frac{1}{2T}$ soddisfa appieno le condizioni appena espresse in quanto la sua periodicizzazione di passo $\frac{1}{T}$ è costante; questo fatto risulta perfettamente compatibile con quanto detto in precedenza dato che la trasformata di Fourier di un rettangolo in frequenza è un seno cardinale nel tempo.

Si noti che qualora si voglia avere una frequenza di bit pari a $f_b = \frac{1}{T}$ occorre garantire una banda pari almeno a $B = \frac{1}{2T}$ e quindi occorre utilizzare forme d'onda che si estendono fra $f = -\frac{1}{2T}$ e $f = \frac{1}{2T}$. Tuttavia se si desidera che le code della forma d'onda nel campo del tempo vadano a zero velocemente è necessario avere segnali più estesi in frequenza, ovviamente sempre mantenendo $s(kT) = 0$ per $k \neq 0$; per soddisfare questa condizione occorre avere una transizione dispari attorno ai punti a frequenza $f = \pm \frac{1}{2T}$, come mostrato in Figura 12.13. Forme d'onda così ottenute, a meno della traslazione più volte citata per garantire la causalità, sono dette *forme d'onda di Nyquist*. In particolare le forme d'onda caratterizzate nel tempo da code

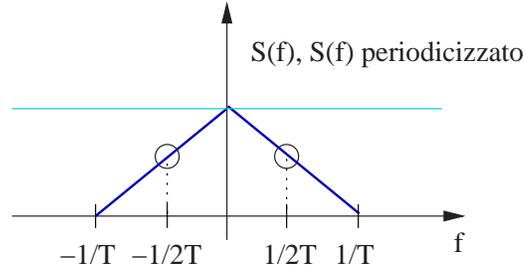


Figura 12.13: Forma d'onda di Nyquist

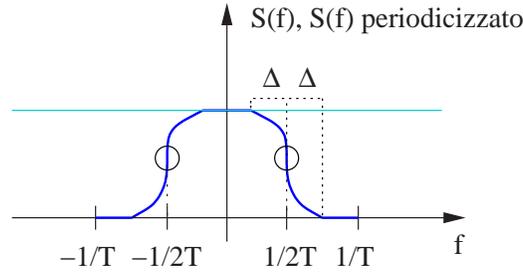


Figura 12.14: Forma d'onda di Nyquist (transizione a coseno rialzato)

che si annullano molto velocemente sono quelle che in frequenza hanno transizioni di tipo sinusoidale attorno ai due punti prima considerati; tali transizioni sono dette *a coseno rialzato*. In Figura 12.14 ne è mostrato un esempio; detta Δ la semiampiezza della zona interessata dalla transizione sinusoidale, a seconda del valore di

$$\delta = \frac{\Delta}{\frac{1}{2T}}$$

varia la banda occupata e in particolare vale

- $B = \frac{1}{2T}$ nel caso sia $\delta = 0$, ossia in presenza di transizione a scalino (e quindi seno cardinale in frequenza)
- $B = \frac{1}{T}$ nel caso sia $\delta = 1$, ossia in presenza di transizione con andamento pari a quello di un seno vero e proprio.

Ad ogni modo, in definitiva, la banda occupata risulta pari a $B = \frac{1}{2T}(1 + \delta)$.

Appurato che per avere interferenza intersimbolica nulla occorre avere forme d'onda di Nyquist in ingresso al campionatore, vediamo ora come sia possibile soddisfare questa condizione. Si noti che l'utilizzo di un filtro che permetta di ottenere questa situazione invece di un filtro adattato, implica una perdita di prestazioni in fatto di rumore; questa perdita, ad ogni modo, risulta essere abbastanza trascurabile e comunque si vedrà in seguito come realizzare un filtro adattato che permetta allo stesso tempo di avere forme d'onda di Nyquist all'ingresso del campionatore.

In Figura 12.15 è mostrato un sistema di trasmissione e ricezione: il segnale prodotto dal generatore di forme d'onda in trasmissione è pari a $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n s_{tr}(t - nT)$, quello in ingresso al filtro è pari a $s_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n s_{ric}(t - nT)$ mentre quello in ingresso al campionatore è $s_o(t) = \sum a_n s_{ro}(t - nT)$ e deve essere una forma d'onda di Nyquist.

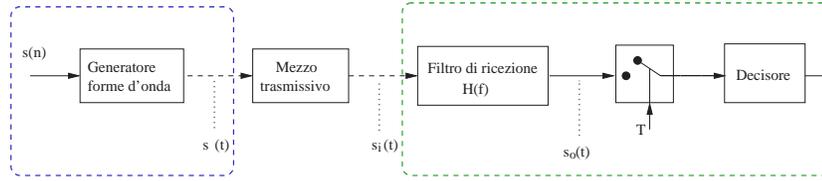


Figura 12.15: Sistema di trasmissione e ricezione con forme d'onda di Nyquist

Il mezzo trasmissivo, incluso l'equalizzatore, può essere modellizzato come un filtro passa-basso con risposta in frequenza $H_M(f)$ pari ad un rettangolo di ampiezza α che si estende fra $f = -B$ e $f = +B$. La frequenza di bit sia pari a $f_b = \frac{1}{T}$. Una possibile scelta sarebbe quella di utilizzare in trasmissione degli impulsi ideali $\delta(t)$; così facendo si otterrebbe un segnale $s_i(t)$ la cui trasformata coinciderebbe con $H_M(f)$. Poiché la banda deve essere almeno pari a $\frac{1}{2T}$ e non superare $\frac{1}{T}$ si ricavano i valori ammissibili per B , ossia

$$\frac{1}{2T} < B < \frac{1}{T}$$

Gli estremi della catena di disuguaglianza appena espressa corrispondono rispettivamente ai casi in cui $\delta = 0$ e $\delta = 1$. In passato una scelta tipica per il parametro δ era quella di $\delta = 0.5$; attualmente si sceglie tipicamente $\delta = 0.2 \div 0.3$ poiché la banda è una risorsa abbastanza preziosa e le richieste in fatto di tecnica per realizzare sistemi con parametro δ così piccolo non sono così elevate.

Al fine di ottenere una forma d'onda di Nyquist all'ingresso del campionario deve valere la seguente relazione

$$S_{ro}(f) = S_{N\delta}(f) = S_{ric}(f)H(f)$$

dove con $S_{N\delta}(f)$ si fa riferimento al fatto che la forma d'onda deve essere di Nyquist e dipende dalla scelta del parametro δ ; detto questo è possibile calcolare la funzione di trasferimento da dare al filtro, ossia

$$H(f) = \frac{S_{N\delta}(f)}{S_{ric}(f)} \quad (12.1)$$

Un approccio come quello appena descritto è caratterizzato da due aspetti negativi:

- è difficile e inutile generare impulsi ideali; del resto l'unico motivo che ne suggerisce l'uso è il fatto che abbiano spettro costante
- per poter trasportare una quantità significativa di energia di segnale (limitando quindi l'effetto del rumore) sarebbe necessario fare impulsi molto "alti" dato che impulsi veramente ideali non sono ovviamente realizzabili.

Si sceglie quindi di utilizzare (per $s_{tr}(t)$) impulsi rettangolari di lunghezza T e ampiezza A . Per quanto riguarda il valore di $S_{ric}(f)$, esso risulterebbe avere un andamento pari a quello di un seno cardinale se il mezzo trasmissivo fosse ideale a banda infinita, mentre in realtà si ottiene un seno cardinale troncato oltre le frequenze $f = \pm B$ del passa-basso con cui si modella il mezzo trasmissivo. Ad ogni modo, per la realizzazione del filtro del ricevitore vale sempre la relazione 12.1.

Infine, qualora si sia interessati a realizzare un filtro per il ricevitore che sia contemporaneamente immune all'interferenza intersimbolica e filtro adattato, è possibile

scegliere $S_{tr}(f) = \sqrt{S_{N\delta}(f)}$ da cui si ricava $S_{ric}(f) = \alpha\sqrt{S_{N\delta}(f)}$. Il filtro risulta quindi avere la seguente risposta in frequenza:

$$H(f) = \frac{S_{N\delta}(f)}{\alpha\sqrt{S_{N\delta}(f)}} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{S_{N\delta}(f)}$$

Quest'ultima soluzione, tuttavia, è affetta dal seguente problema: la quantità $\sqrt{S_{N\delta}(f)}$ è limitata in frequenza e di conseguenza molto estesa nel dominio del tempo; di conseguenza la forma d'onda complessiva trasmessa dipende in ogni istante anche da quanto avvenuto precedentemente.

12.1.5 Impulsi base a responso parziale

E' stato visto finora come utilizzare impulsi di Nyquist per garantire interferenza intersimbolica nulla al ricevitore. La banda minima necessaria per una trasmissione binaria in questo caso è pari a $\frac{f_b}{2} = \frac{1}{2T}$. Tale banda minima richiede però l'utilizzo di impulsi base del tipo seno cardinale che hanno code che scendono molto lentamente creando problemi anche insormontabili quando vi siano, anche piccoli, errori di sincronizzazione del campionatore presente al ricevitore.

Al fine di evitare i problemi appena descritti e utilizzare comunque la banda minima si consideri l'impulso elementare la cui trasformata sia data da:

$$S_{ro}(f) = S_c(f) = \begin{cases} 2 \cos(\pi f T_b) & \text{per } |f| \leq \frac{f_b}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \\ = \text{rect}\left(\frac{f}{\frac{1}{T}}\right) 2 \cos(\pi f T_b) = \text{rect}\left(\frac{f}{\frac{1}{T}}\right) [e^{j\pi f T_b} + e^{-j\pi f T_b}]$$

Si noti come il segnale $S_c(f)$ occupi la banda minima $\frac{1}{2T}$; per quanto riguarda la rappresentazione del segnale nel dominio del tempo, si ricorda che la trasformata di Fourier di un rettangolo è un seno cardinale e quindi $s_c(t)$ è dato dalla somma di due seni cardinali sfasati rispettivamente di $\pm\frac{T}{2}$. In Figura 12.16 sono mostrati dapprima i due seni cardinali componenti il segnale e poi la loro somma ovvero il segnale vero e proprio. Si noti come questa operazione provochi un aumento considerevole della distanza fra i primi zeri, pari ora a $3T$. Questo fatto fa sì che in fase di campionamento non vi sarà mai un istante di tempo in cui il segnale dipenda da un solo campione, dato che questi assumono valori significativi per un intervallo di tempo pari a $3T$ e vengono generati ogni T .

In Figura 12.17 è mostrata la situazione; si noti tuttavia che qualora si scelga di campionare all'istante di tempo cerchiato in figura, il valore di segnale letto dipende solo dagli impulsi numerati con 2 e 3. Il valore letto, quindi, porta informazioni su due impulsi; tuttavia se si suppone di aver già preso una decisione per l'impulso 2 il segnale disponibile sarà utilizzato facilmente per decidere sul simbolo 3.

Questo meccanismo implica una certa perdita di potenza dato che gli impulsi non vengono letti al loro punto di massimo, ma questo è il prezzo da pagare per poter usare la banda minima in frequenza per la trasmissione.

Per quanto riguarda infine la decisione a valle del campionatore, la tabella seguente illustra come il decisore generi i simboli in uscita. Si indica con $b(n)$ la sequenza di

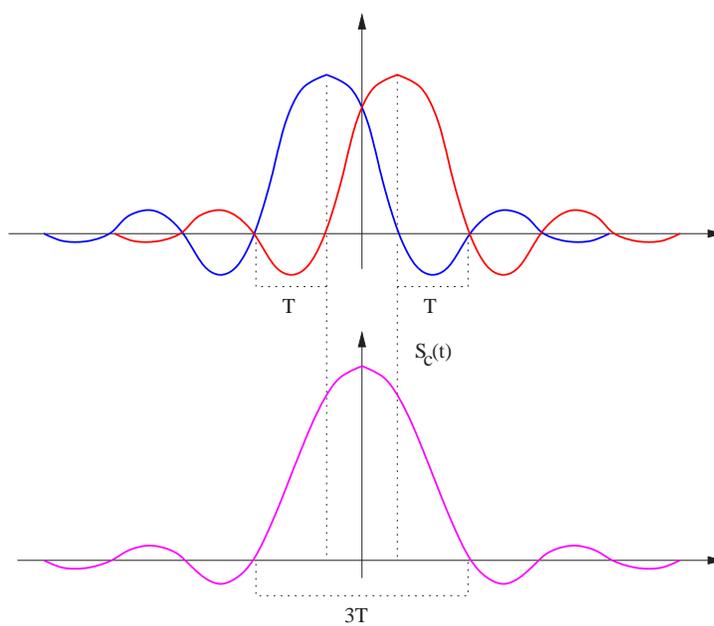
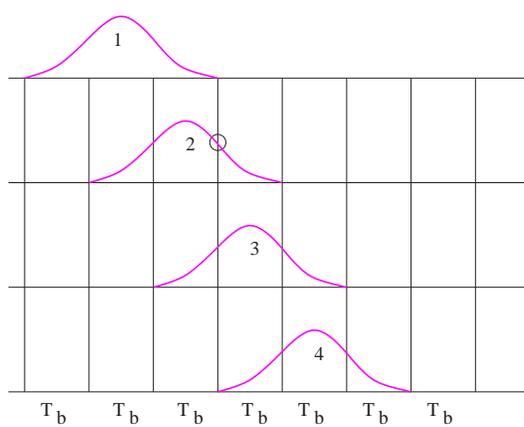
Figura 12.16: Composizione del segnale $s_c(t)$ 

Figura 12.17: Successione di impulsi



Figura 12.18: Sistema di ricezione e trasmissione

simboli binari da trasmettere (valori che indicati con $+1$ e -1). Invece di trasmettere direttamente $b(n)$ si utilizza $d(n) = d(n-1) XOR b(n)$. Al campionario del ricevitore si ottengono dei valori che dipendono quindi dalla somma di $d(n-1)$ e $d(n)$.

$b(n)$	$d(n-1)$	$d(n)=b(n) XOR d(n-1)$	$d(n-1)+d(n)$	$ d(n-1)+d(n) $	$u(n)$
+1 ('1')	+1 ('1')	-1 ('0')	0	0	'0'
+1 ('1')	+1 ('1')	+1 ('1')	0	0	'0'
-1 ('0')	-1 ('0')	+1 ('1')	+2	+2	'1'
-1 ('0')	-1 ('0')	-1 ('0')	+2	+2	'1'

La quarta colonna della tabella rappresenta cosa “legge” il campionario. Prendendone il modulo e associando al valore 0 il simbolo '0' e al valore +2 il simbolo '1' si ottiene $u(n)$. Come è facile vedere $u(n)$ è la negazione di $b(n)$.

12.2 Relazione tra potenza in trasmissione e in ricezione.

Consideriamo il consueto sistema di trasmissione-ricezione rappresentato in Figura 12.18. Il segnale $b(t)$ in ingresso al generatore di forme d'onda rappresenta le informazioni numeriche che si vogliono trasmettere. Il segnale in uscita dal sistema di trasmissione può essere scritto come $s_t(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n s(t-nT)$ dove $a_n = 1$ se viene codificato il simbolo binario 1, $a_n = -1$ se viene codificato 0. Il mezzo trasmissivo può essere descritto con una funzione di trasferimento $H_{MT}(f)$. Il segnale in ingresso al filtro di ricezione, che ha come funzione di trasferimento $H(f)$ può essere scritto come $s_i(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n s_r(t-nT)$. Infine il segnale in ingresso al campionario è espresso con $s_o(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n s_{ro}(t-nT)$. Il nostro obiettivo è calcolare le relazioni tra le potenze medie che sono in gioco nel sistema. Assumiamo che i simboli da trasmettere siano equiprobabili ed indipendenti. Trattiamo i segnali illustrati sopra come processi aleatori, per poterli trattare in modo più semplice questi devono essere processi *stazionari*. Affinché questo sia verificato essi devono avere una fase iniziale casuale, fare questa assunzione è sicuramente ragionevole se si pensa di mettersi nell'ottica del ricevitore. I nostri segnali saranno dunque scritti come

$$\begin{aligned} s_t(t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n s(t-nT-\vartheta) \\ s_i(t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n s_r(t-nT-\vartheta) \\ s_o(t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n s_{ro}(t-nT-\vartheta) \end{aligned}$$

Ovviamente nel sistema a ϑ si aggiungeranno ritardi dovuti alla propagazione attraverso il mezzo trasmissivo, che però trascuriamo. Fatte queste assunzioni possiamo scrivere in modo più semplice le relazioni tra le densità spettrali di potenza dei vari segnali, infatti

$$G_{st}(f) = \frac{\sigma^2}{T} |S(f)|^2$$

dove σ^2 rappresenta la varianza degli a_n , poiché questo coefficiente può assumere solamente due valori equiprobabili tale varianza vale 1 e $S(f)$ rappresenta la

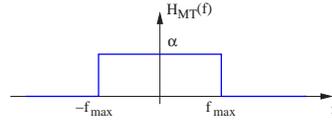


Figura 12.19: Funzione di trasferimento del mezzo trasmissivo

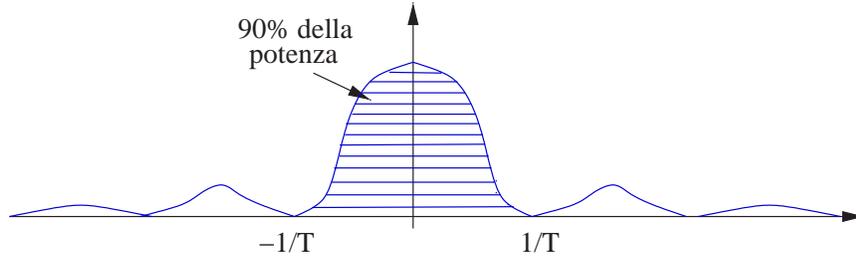


Figura 12.20: Distribuzione della potenza nella funzione quadrato del seno cardinale

trasformata di Fourier della forma d'onda base $s(t)$, sostituendo otteniamo

$$G_{st}(f) = \frac{1}{T} |S(f)|^2$$

Analogamente avremo

$$\begin{aligned} G_{si}(f) &= \frac{1}{T} |S_r(f)|^2 \\ G_{so}(f) &= \frac{1}{T} |S_{ro}(f)|^2 \end{aligned}$$

Inoltre si avrà che

$$\begin{aligned} G_{so}(f) &= G_{si}(f) |H(f)|^2 \\ G_{si}(f) &= G_{st}(f) |H_{MT}(f)|^2 \end{aligned}$$

Abbiamo visto in precedenza che se necessario è posto in serie al mezzo trasmissivo un equalizzatore in modo tale che la sua funzione di trasferimento $H_{MT}(f)$, rappresentata in Figura 12.19, sia una costante nell'intervallo di frequenze di nostro interesse; per non avere disturbi dovuti ad interferenza intersimbolica è necessario che valga la relazione $f_{max} = B = \frac{1}{2T}(1 + \delta)$, dove δ è un parametro che può variare tra 0 ed 1 che identifica la forma d'onda di Nyquist in ingresso al campionatore. Analizziamo il caso più semplice possibile e supponiamo che la forma d'onda base in trasmissione $s(t)$ sia un impulso rettangolare, la sua trasformata di Fourier è pertanto un seno cardinale elevato al quadrato, rappresentato in Figura 12.20, nel suo lobo centrale che si trova nell'intervallo di frequenze $[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}]$ cade il 90% della potenza, mentre se si considera l'intervallo di frequenze $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$ trovo circa il 70% della potenza. In realtà non avrò poi impulsi effettivamente rettangolari ma delle transizioni più dolci, ma in prima approssimazione si può affermare che la potenza in ricezione sia pari alla potenza in trasmissione moltiplicata per α^2 , dove α è l'amplificazione del mezzo trasmissivo ovviamente minore di 1, riassumendo

$$P_R = \alpha^2 P_T$$

Per quanto riguarda il legame tra i segnali in ricezione e quelli in ingresso al campionatore le cose si complicano notevolmente. Per le nostre applicazioni è però sufficiente considerare dei requisiti sulla potenza media ricevuta, o meglio sull'energia media per simbolo. Nel caso binario ho due forme d'onda ciascuna di segno opposto all'altra e posso definire l'energia media che ricevo ogni volta che è codificato un simbolo binario come

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |S_r(f)|^2 df$$

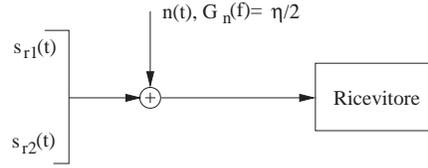


Figura 12.21: Sistema di ricezione

Quindi integrando la relazione $G_{si}(f) = \frac{1}{T}|S_r(f)|^2$ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_{si}(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}|S_r(f)|^2df$$

$$P_R = \frac{1}{T}E_b = f_b E_b$$

dove indichiamo con E_b l'energia media per ogni bit e con f_b la frequenza di bit. Se invece di due simboli avessi un alfabeto di dimensioni maggiori la formula da considerare sarebbe

$$\frac{\sigma^2}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_r(f)|^2 df$$

12.3 Rappresentazione geometrica

Consideriamo il sistema di ricezione rappresentato in Figura 12.21 e supponiamo di trasmettere un bit per volta. I segnali all'ingresso del ricevitore in assenza di disturbo possono essere indicati con $s_{r1}(t)$, che rappresenta la forma d'onda associata alla trasmissione del simbolo '1' e $s_{r2}(t)$ che risulta associata alla trasmissione del simbolo '0'. All'ingresso del ricevitore abbiamo anche un rumore additivo $n(t)$ che possiamo schematizzare con un processo gaussiano a densità spettrale di potenza costante $G_n(f) = \frac{\eta}{2}$ (rumore bianco) e quindi a media nulla. Riassumendo quindi il segnale in ingresso al ricevitore potrà essere scritto come

$$v(t) = \begin{cases} s_{r1}(t) + n(t) \\ s_{r2}(t) + n(t) \end{cases}$$

I segnali $s_{r1}(t)$ e $s_{r2}(t)$ possono essere rappresentati in uno spazio a due dimensioni, le forme d'onda $u_i(t)$ con $i = 1, 2$ rappresentano tale spazio e sono *ortonormali*. L'errore è invece una componente non deterministica pertanto per poterlo rappresentare in modo completo sono necessarie infinite forme d'onda base. Facciamo in modo che le prime due componenti di tale spazio siano coincidenti con $u_1(t)$ e $u_2(t)$. Operando in questo modo la componente di rumore potrà essere scomposta in una parte rilevante, descrivibile come una somma pesata di $u_1(t)$ e $u_2(t)$, ed una non rilevante $n(t) = n'(t) + n''(t)$. Questo ragionamento vale anche per il segnale d'ingresso $v(t) = v'(t) + v''(t)$. Tale situazione è rappresentata nella Figura 12.22. Le componenti secondo $u_1(t)$ e $u_2(t)$ dell'errore possono essere trovate nel modo seguente

$$\beta_i = \int_{-\infty}^{+\infty} n(t)u_i(t)dt$$

con $i = 1, 2$, β_i è una variabile aleatoria, analizziamo ora le sue caratteristiche statistiche. L'operazione che ci permette di trovare la proiezione è lineare in $n(t)$, ciò significa che se dal segnale $n_1(t)$ si ottiene β_1 e dal segnale $n_2(t)$ si ottiene β_2 allora da $\beta_1 + \beta_2$ si ricava $n_1(t) + n_2(t)$, sappiamo inoltre che se in ingresso ad un sistema lineare ho un processo gaussiano tale distribuzione si manterrà anche in

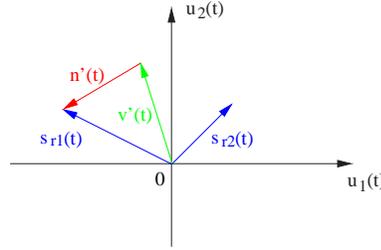


Figura 12.22: Rappresentazione geometrica dei segnali in ingresso al ricevitore

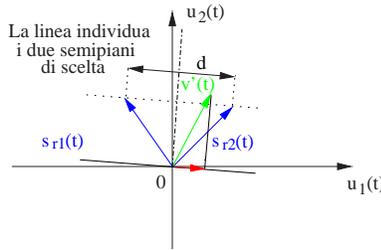


Figura 12.23: Metodo a massima verosimiglianza, rappresentazione geometrica

uscita, pertanto le componenti β_i sono variabili aleatorie gaussiane a media nulla. Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} E[\beta_i \beta_j] &= E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} n(t) u_i(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} n(\lambda) u_j(\lambda) d\lambda \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E[n(t)n(\lambda)] u_i(t) u_j(\lambda) dt d\lambda \end{aligned}$$

Avendo un rumore bianco la funzione di autocorrelazione $E[n(t)n(\lambda)]$ risulta essere impulsiva, vale precisamente $\frac{\eta}{2} \delta(t - \lambda)$, quindi per $t \neq \lambda$ risulta essere nulla, da questo deriva che uno dei 2 integrali si annulla perché esiste solo se $t = \lambda$, posso dunque scrivere

$$E[\beta_i \beta_j] = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_i(t) u_j(t) dt = \begin{cases} \frac{\eta}{2} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Da questo posso dedurre che le variabili aleatorie β_i sono gaussiane a media nulla e varianza $\sigma^2 = \frac{\eta}{2}$ e sono incorrelate tra loro.

Assumendo che i simboli trasmessi siano equiprobabili, il ricevitore dovrà implementare una stima sui bit trasmessi del tipo a massima verosimiglianza. Trovare il simbolo cui corrisponde la probabilità condizionata massima significa trovare il simbolo per cui è minima la distanza $|v'(t) - s_{ri}(t)|$. In altre parole si sceglie per il simbolo più vicino al punto rappresentativo di $v'(t)$, come mostrato in Figura 12.23. Questo è analogo a considerare da che parte sta la proiezione del vettore $v'(t)$ sulla perpendicolare al vettore differenza $s_{r1}(t) - s_{r2}(t)$, questo può essere scritto come

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v'(t) [s_{r1}(t) - s_{r2}(t)] = \langle v'(t)(s_{r1}(t) - s_{r2}(t)) \rangle = \langle v(t)(s_{r1}(t) - s_{r2}(t)) \rangle$$

La formula mostra chiaramente che si riottiene quanto visto con il *filtro adattato*.

La probabilità di errore del ricevitore per sistemi binari e simboli equiprobabili può essere calcolata come la probabilità che la proiezione della componente rilevante di rumore lungo la congiungente fra $s_{r1}(t)$ e $s_{r2}(t)$ abbia un modulo maggiore della

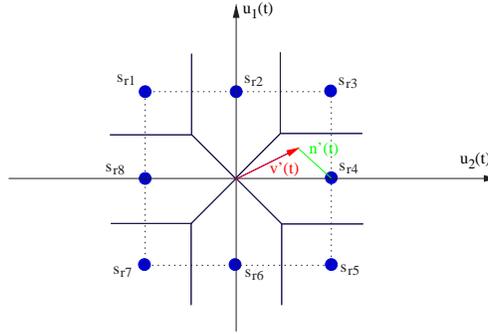


Figura 12.24: Costellazione di Voronoi

semi-differenza tra s_{r1} e s_{r0} , che indichiamo con $\frac{d}{2}$. Se supponiamo di aver orientato il piano in modo tale che una delle forme d'onda base vada a coincidere con la direzione congiungente $s_{r1}(t)$ e $s_{r2}(t)$, la probabilità d'errore $p(\varepsilon)$ può essere espressa come

$$p(\varepsilon) = p\left(\beta_{s_{r1}(t)-s_{r2}(t)} > \frac{d}{2}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{2\sigma_\beta^2}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{2\frac{\eta}{2}}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d^2}{4\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

12.4 Sistemi di trasmissione con alfabeto di dimensione maggiore di due

Vogliamo analizzare che cosa succede in ricezione considerando un sistema di trasmissione con un alfabeto di simboli di dimensione M maggiore di 2, indichiamo con N la dimensione del blocco di bit che caratterizza ciascun simbolo ($M = 2^N$). Ad ogni simbolo è associata (al trasmettitore) una determinata forma d'onda. Ovviamente la sequenza delle forme d'onda trasmesse giungerà al ricevitore modificata dagli effetti della propagazione lungo il mezzo trasmissivo ed alterata dai disturbi/rumori introdotti dalla propagazione e dagli apparati di ricezione. Se tutti i simboli trasmessi sono equiprobabili ed indipendenti l'approccio con cui funziona il ricevitore è la decisione/stima a massima verosimiglianza. Sulla base di quanto già visto nel caso binario lavorando geometricamente nello spazio dei segnali è più semplice capire come dovrà operare il ricevitore ottimo.

In generale avrò bisogno di uno spazio a M dimensioni per rappresentare le M forme d'onda associate ai segnali in trasmissione, in alcuni casi particolari possono ad esempio bastare 2 forme d'onda per rappresentare 8 simboli, mostriamo in Figura 12.24 questa situazione, $v'(t)$ rappresenta la componente rilevante del segnali in ingresso al ricevitore. Solitamente l'insieme dei simboli è indicato come costellazione. Assumiamo che il rumore sia un processo gaussiano bianco, pertanto con densità spettrale di potenza costante e pari a $\frac{\eta}{2}$ e media nulla. Ciascuna delle sue componenti lungo le funzioni base avrà varianza $\frac{\eta}{2}$. Il ricevitore tassellerà lo spazio in M regioni composte da tutti i punti più vicini ad un determinato simbolo (regioni di Voronoi). A seconda della regione in cui cade $v'(t)$ il ricevitore deciderà quale simbolo sia stato trasmesso.

La valutazione di quale sia la probabilità di errore è più complessa che nel caso binario, sempre ipotizzando che i simboli siano equiprobabili in trasmissione la

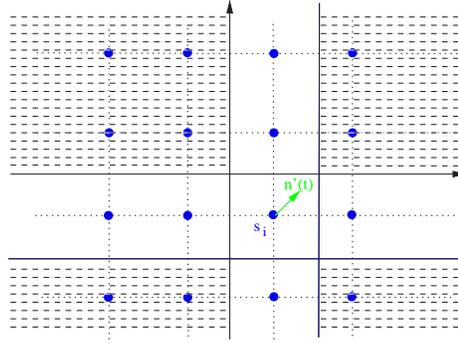


Figura 12.25: Simboli disposti su di un reticolo regolare

probabilità di scambiare un simbolo con un altro è data da

$$P_S(\varepsilon) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (1 - p(\text{riconoscimento corretto simbolo } s_i))$$

Il calcolo di questa probabilità corrisponde alla valutazione di un integrale di una gaussiana con un massimo di M dimensioni (nella Figura 12.24 la dimensione è 2) esteso a una superficie/volume/ipervolume che può avere una forma complicata.

Nel caso la dimensione dello spazio di rappresentazione dei segnali sia 2 ed i simboli trasmessi siano disposti su di un reticolo regolare, come quello rappresentato in Figura 12.25 questo calcolo è relativamente semplice e ci suggerisce alcune semplificazioni utile per la valutazione delle probabilità d'errore anche in situazioni più complesse. Come già detto le componenti di rumore secondo ciascun asse sono variabili gaussiane indipendenti tra loro a media 0 e varianza $\frac{\eta}{2}$. Se consideriamo uno dei simboli più interno alla costellazione, ad esempio quello che in Figura 12.25 è rappresentato con s_i la probabilità di un errore in ricezione, sapendo che è stato trasmesso s_i è data dalla probabilità che $n'(t)$ sia maggiore, nelle sue componenti orizzontali o verticali, della semidistanza tra due simboli, che indichiamo con $\frac{d}{2}$

$$\begin{aligned} P_{s_i}(\varepsilon) &= 1 - P(\text{corretta ricezione}) = 1 - p(\beta_1 < \frac{d}{2}, \beta_2 < \frac{d}{2}) = \\ &= 1 - \left[1 - \text{erfc}\left(\frac{d^2}{4\eta}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \left[1 - \text{erfc}\left(\frac{d^2}{4\eta}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= 1 - \left[1 - 2\text{erfc}\left(\frac{d^2}{4\eta}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\text{erfc}\left(\frac{d^2}{4\eta}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right] = 4\frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{d^2}{4\eta}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Abbiamo tralasciato il termine quadratico, l'approssimazione fatta è di tipo conservativo (si elimina un termine comunque piccolo e di segno negativo). La probabilità di errore può essere letta come la somma delle probabilità di confondere s_i con i 4 simboli vicini e non considerando le aree tratteggiate che nella Figura 12.25 sono computate due volte. Questa approssimazione è chiamata *Union Bound Approximation*. Questo tipo di approssimazione è usata anche nel caso i simboli non siano disposti su di un reticolo regolare. Dato un certo simbolo la probabilità di errore è ottenuta come la somma delle probabilità di errore "verso" i simboli più vicini. Un'altra approssimazione è quella di non calcolare la probabilità d'errore per tutti i simboli trasmessi ma solo per quelli con maggiore probabilità di errore. In formule la probabilità globale di errore può essere scritta come

$$P_s(\varepsilon) = \frac{1}{M} \sum P_{s_i}(\varepsilon) \approx P_{\text{simbolo interno}}(\varepsilon)$$

Vediamo alcuni esempi di applicazione della tecnica appena descritta.

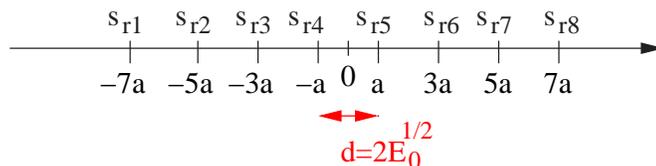


Figura 12.26: Disposizione delle forme d'onda base per un sistema multilivello

12.4.1 Sistemi multilivello

Consideriamo un sistema di trasmissione binario che usa come forme d'onda due segnali antipodali, in tal caso la probabilità di errore è data da

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d^2}{4\eta} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{E_b}{\eta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Osserviamo che imponendo di avere un impulso di Nyquist in ingresso al campionario e quindi ponendo $B = \frac{1}{2} f_b (1 + \delta)$, dove δ è fissato dalla tecnologia del ricevitore, l'unico parametro libero risulta essere l'energia di bit E_b . Se voglio risparmiare sulla banda utilizzata considero la trasmissione di un gruppo di bit anziché di un singolo bit. Consideriamo dunque un sistema in cui gli M simboli in ingresso al ricevitore siano rappresentati da una singola forma d'onda che può assumere M possibili ampiezze. I simboli trasferiti sono costituiti da blocchi di N bit, quindi $M = 2^N$. Il tempo di simbolo, che indichiamo con T_s è pari a NT_b , in questo modo la banda occupata risulta scalata di un fattore N in quanto la frequenza di simbolo risulta pari a $f_s = \frac{1}{NT_b} = \frac{f_b}{N}$. Per la rappresentazione di questi M simboli è sufficiente uno spazio ad 1 dimensioni, in Figura è rappresentata la soluzione scelta nel caso $M = 8$. Per il calcolo della probabilità di errore consideriamo che i simboli più "sfortunati" (più interni nella costellazione) hanno due vicini verso i quali in ricezione è possibile sbagliare

$$P_s(\varepsilon) = 2 \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d^2}{4\eta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Per il calcolo della probabilità d'errore sul bit dobbiamo fare alcune considerazioni, in particolare possiamo pensare di associare ai simboli contigui nella costellazione codici binari formati ovviamente da N bit che si differenzino tra loro solamente per un bit (Codici di Gray). Ad esempio con $N = 3$ potrei avere 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100 (si osservi che ho anche una proprietà di circolarità, in quanto l'ultimo simbolo ed il primo differiscono di un solo bit). In questo caso se si confonde un simbolo con il vicino solo 1 degli N bit associati sarà errato

$$P_b(\varepsilon) = \frac{1}{N} P_s(\varepsilon)$$

La banda risulterà essere $B = \frac{1}{2} \frac{f_b}{N} (1 + \delta)$.

Il legame tra l'energia media associata ad ogni simbolo e d^2 esprimibile in funzione di M

$$E_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M/2} \left[\frac{d}{2} (2i - 1) \right]^2 = \frac{M^2 - 1}{3} \frac{d^2}{4} = \frac{2^{2N} - 1}{3} \frac{d^2}{4}$$

inoltre $E_s = N E_b$ dove come abbiamo detto E_b rappresenta l'energia media per bit, pertanto $E_b = \frac{E_s}{N} \approx \frac{2^{2N-1}}{3} \frac{d^2}{4}$.

Volendo quindi confrontare un sistema binario con un sistema multilivello a parità di probabilità d'errore sul bit è possibile osservare come all'aumentare di N la

00	---
01	-+--+
10	-++
11	-++-

Tabella 12.1: Codifica di Hadamard con $N = 2$ e $M = 4$

banda si riduca di $\frac{1}{N}$ ma l'energia media associata al singolo bit aumenti quasi esponenzialmente.

12.4.2 Forme d'onda ortogonali

Un altro esempio interessante è basato sull'uso di M forme d'onda tutte ortogonali tra loro e di uguale energia E_s . Il simbolo trasmesso risulta ancora composto da N bit dove come sempre $M = 2^N$. Per la costruzione del set di M forme d'onda vengono usate diverse modalità. Un esempio semplice e molto utilizzato è quello noto come *codifica di Hadamard*. Consideriamo inizialmente un sistema binario, indichiamo con $+$ la forma d'onda per la trasmissione di '1', con $-$ la forma d'onda opposta per la trasmissione di 0. Se considero ora un simbolo formato da N bit posso pensare di codificare gli M simboli attraverso una sequenza di M forme d'onda elementari $+$ e $-$, in modo da ottenere dei segnali ortogonali. Poiché $T_s = NT_b$ le forme d'onda elementari subiranno una compressione di un fattore $\frac{M}{N}$. Ad esempio se $N = 2$ e $M = 4$ la codifica ottenuta è quella mostrata in Tabella 12.1. I simboli che compongono le varie forme d'onda possono essere letti come delle matrici. Esiste una formula ricorsiva che permette di crearle. Partiamo da $M = 2$ dove la matrice M_2 vale

$$M_2 = \begin{bmatrix} - & - \\ - & + \end{bmatrix}$$

passo quindi a $M = 4$ nel modo seguente

$$M_4 = \begin{bmatrix} M_2 & M_2 \\ M_2 & M_2^* \end{bmatrix}$$

dove M_2^* rappresenta la matrice M_2 con gli elementi tutti cambiati di segno. Ovviamente in questo caso avrò un incremento di banda di un fattore pari a $\frac{M}{N} = \frac{2^N}{N}$. Per quanto riguarda la probabilità di errore sul simbolo posso scrivere

$$\begin{aligned} P_s(\varepsilon) &= (M-1) \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d^2}{4\eta} \right)^{\frac{1}{2}} = (M-1) \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{E_s}{2\eta} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (M-1) \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{NE_b}{2\eta} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2^N-1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{NE_b}{2\eta} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

poiché ho $M-1$ simboli tutti a uguale distanza rispetto al simbolo in questione. Per valori grandi di x posso approssimare $\operatorname{erfc}(x)$ nel modo seguente

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}$$

pertanto posso approssimare la possibilità di errore sul simbolo nel seguente modo

$$P_s(\varepsilon) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{NE_b}{2\eta}}} e^{-N\left(\frac{E_b}{2\eta} - \ln 2\right)}$$

La probabilità di errore sul simbolo decresce a nostro piacere al crescere di N e mantenendo costante l'energia media associata ad un bit E_b , purché sia soddisfatta

la disequazione $\frac{E_b}{\eta} > 2 \ln 2 \approx 1,4$ (in realtà tale soglia può essere portata a $\ln 2$ tralasciando l'approssimazione union bound). Va analizzato ora il legame esistente tra la probabilità di errore sul simbolo e quella sul singolo bit. Avendo trasmesso un simbolo vi è uguale probabilità di errore rispetto agli altri $M - 1$, considerando poi uno specifico bit all'interno degli $M - 1$ possibili simboli errati in $\frac{M}{2}$ il bit è effettivamente errato, quindi

$$P_b(\varepsilon) = \frac{\frac{M}{2}}{M-1} P_s(\varepsilon) \approx \frac{1}{2} P_s(\varepsilon)$$

In generale si può dunque affermare che vale la seguente relazione

$$\frac{1}{N} P_s(\varepsilon) \leq P_b(\varepsilon) \leq \frac{1}{2} P_s(\varepsilon)$$

12.5 Velocità di trasmissione

Vogliamo ora determinare la massima velocità di trasmissione per un sistema caratterizzato da una banda B . Indichiamo con C la capacità di canale, misurata in *bit/sec*, per questo parametro vale la relazione

$$C \leq B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$$

tale formula può essere riscritta come

$$\frac{C}{B} \leq \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) = \log_2 \left(1 + \frac{C E_b}{\frac{\eta}{2} 2B} \right) = \log_2 \left(1 + \frac{C E_b}{B \eta} \right)$$

dove il parametro $\frac{C}{B}$ indica il numero di bit che possono essere trasmessi in un secondo per ogni Hertz di banda disponibile.

12.6 Trasmissione in banda passante

Le tecniche di trasmissione fin qui descritte, ossia di trasmissione in banda base, sono utilizzabili solo nel caso il mezzo trasmissivo considerato abbia un comportamento tale da poter essere modellizzato come un filtro passa-basso; qualora invece il mezzo trasmissivo abbia un funzionamento di tipo passa-banda occorre adottare tecniche di *trasmissione in banda passante* facendo in modo che il segnale da trasmettere cada completamente all'interno della banda del mezzo trasmissivo. In Figura 12.27 è mostrato l'andamento della risposta in frequenza di un tipico mezzo trasmissivo di tipo passa-banda di banda B .

12.6.1 Modulazione BPSK

Con la tecnica di modulazione *BPSK* (*Binary Phase-Shift Keying*) si considera un sistema di trasmissione binario: si utilizza un segnale $b(t)$ che assume valore $+1$ per indicare il simbolo logico '1' e il valore -1 per indicare il simbolo logico '0'. Ipotizzando di utilizzare una modulazione di ampiezza, si otterrebbe un segnale

$$v(t) = b(t) \sqrt{2P_s} \cos(2\pi f_0 t)$$

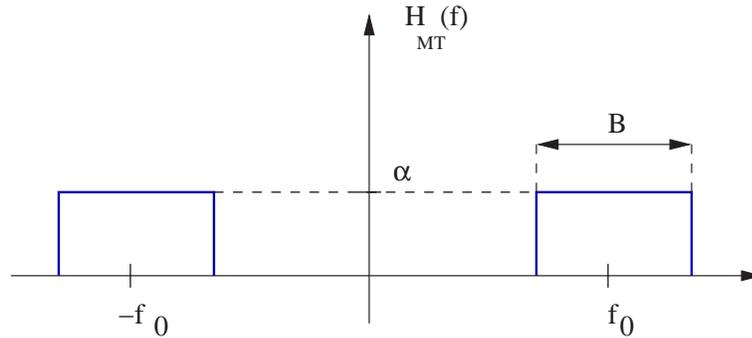
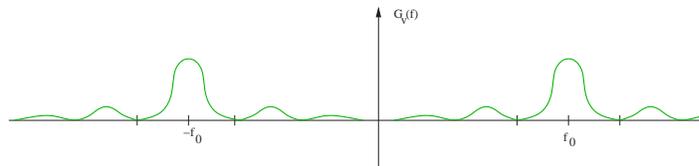


Figura 12.27: Mezzo trasmissivo passa-banda

Figura 12.28: Densità spettrale di potenza di $v(t)$

con frequenza $f_0 \gg f_b = \frac{1}{T_b}$ e potenza P_s (poiché $P_s = \frac{1}{2}A^2$ in cui A è l'ampiezza). E' tuttavia possibile interpretare il segnale come se fosse modulato in fase; risulta infatti

$$v(t) = \sqrt{2P_s} \cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}(b(t) - 1))$$

Il segnale $v(t)$ può essere visto anche come processo casuale a patto che la fase iniziale di $b(t)$ sia incognita; per garantire la stazionarietà occorre poi che anche il termine cosinusoidale abbia fase iniziale casuale. La densità spettrale di potenza di $b(t)$ è pari a $G_b = \frac{1}{T} |S(f)|^2$ (dove $S(f)$ è la trasformata di Fourier degli impulsi rettangolari in ingresso) e andamento del tipo di quello di un seno cardinale al quadrato; in Figura 12.28 è mostrata la densità spettrale di potenza del segnale $v(t)$. E' interessante notare che la quasi totalità della potenza statistica del segnale è concentrata nelle bande di ampiezza $\frac{2}{T}$ centrate per frequenze $f = \pm f_0$. Tuttavia in realtà la densità spettrale di potenza del segnale $v(t)$ copre tutte le frequenze; qualora si intendano trasmettere più segnali, occorrerà dunque utilizzare un filtro in uscita dal trasmettitore al fine di eliminare le code del segnale fuori dalle due bande accennate prima, evitando così sovrapposizioni indesiderate. Ovviamente una soluzione alternativa a questa potrebbe essere quella di utilizzare in frequenza degli impulsi molto dolci nel tempo che siano quindi piuttosto limitati come estensione in frequenza.

Per quanto riguarda la ricezione, il segnale $S_r(t)$ in ingresso viene dapprima riportato in banda base con approcci simili a quanto detto per la modulazione/demodulazione di ampiezza, poi si procede alla demodulazione come descritto a proposito della trasmissione in banda base. In Figura 12.29 è mostrato lo schema a blocchi del ricevitore: il segnale in ingresso viene moltiplicato per la portante $2 \cos(2\pi f_0 t)$ e poi filtrato in un filtro passa basso al fine di eliminare le armoniche a frequenza $f = 2f_0$; il filtro $H(f)$ successivo può venire realizzato come filtro adattato o in modo da eliminare l'interferenza intersimbolica così come descritto nei paragrafi precedenti.

Si noti tuttavia che rispetto alla trasmissione in banda base si ha un notevole au-

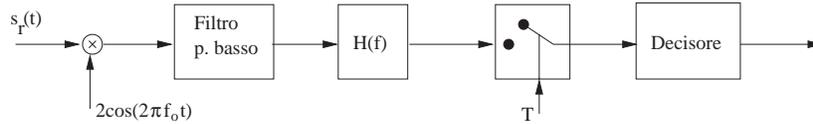


Figura 12.29: Ricevitore BPSK

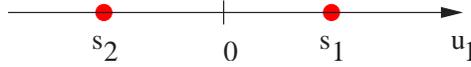


Figura 12.30: Rappresentazione geometrica BPSK

mento della banda richiesta al sistema per avere interferenza intersimbolica nulla; si ha infatti che

$$B_{BPSK} = 2\frac{1}{2}f_s(1 + \delta) = f_s(1 + \delta) = f_b(1 + \delta)$$

dove il primo coefficiente è dovuto direttamente alla modulazione in ampiezza; si noti che nel BPSK la frequenza di bit e quella di simbolo coincidono. La banda necessaria per un sistema di trasmissione BPSK risulta dunque doppia rispetto a quella necessaria per una modulazione in banda base.

Rappresentazione geometrica e probabilità d'errore Il segnale $v(t)$ può essere scritto anche come

$$v(t) = b(t)\sqrt{2P_s}\cos(2\pi f_0t) = \sqrt{P_sT_b}b(t)\sqrt{\frac{2}{T_b}}\cos(2\pi f_0t)$$

in cui il termine $\sqrt{\frac{2}{T_b}}\cos(2\pi f_0t)$ indica una forma d'onda base $u_1(t)$ ad energia unitaria. In Figura 12.30 è mostrata la disposizione geometrica dei due possibili segnali corrispondenti ai simboli logici "0" e "1"; la distanza dall'origine è pari alla radice dell'energia dei due segnali $\sqrt{E_b} = \sqrt{P_sT_b}$. Se si considerano le stesse condizioni della trasmissione in banda base, con filtro adattato, rumore bianco, etc. si trova che la probabilità d'errore è data da

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{d^2}{4\eta}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{E_b}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ed è quindi pari a quella ottenuta nel caso della trasmissione in banda base.

12.6.2 Modulazione DPSK

Una delle principali limitazioni del sistema di modulazione BPSK sta nel recupero della portante; come detto precedentemente nel capitolo dedicato alla modulazione di ampiezza, un errore anche piccolo nella ricostruzione della portante può generare un'errata demodulazione del segnale.

Sarebbe dunque interessante poter usare il segnale stesso come portante; a tal scopo si procede come mostrato in Figura 12.31: il segnale $s_r(t)$ viene moltiplicato per la sua versione ritardata di T_b . Così facendo si evita di recuperare la portante e si ottiene valore logico "1" nel caso il segnale assuma valore "1" per due bit di fila, si

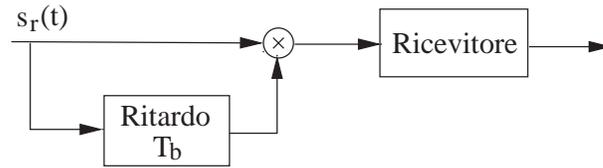


Figura 12.31: Il segnale $s_r(t)$ è moltiplicato per la sua versione ritardata

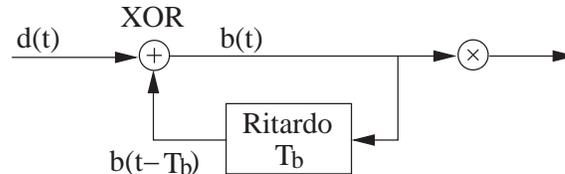


Figura 12.32: Trasmettitore DPSK

ottiene “0” in tutti gli altri casi. Si ottiene quindi un sistema sensibile alle transizioni di bit invece che al valore dei singoli bit; questo metodo è detto *DPSK (Differential Phase-Shift Keying)*.

Per quanto riguarda la realizzazione del trasmettitore, in Figura 12.32 è mostrato lo schema a blocchi; si noti come il funzionamento è simile a quanto mostrato per le forme d’onda a responso parziale.

Utilizzando la modulazione DBPSK la banda da dare al sistema non cambia, tuttavia si perde in fatto di probabilità d’errore; dato che il sistema si serve costantemente del segnale ricevuto al passo precedente utilizzandolo come portante, un’eccessiva quantità di rumore può causare errori di decisione su due bit successivi. Si trova infatti che

$$p_{DBPSK}(\varepsilon) \simeq 2p_{BPSK}(\varepsilon)$$

12.6.3 Modulazione QPSK e NO-QPSK

Si è detto che uno dei principali problemi della modulazione BPSK è la banda minima doppia rispetto ad una trasmissione in banda base; esistono essenzialmente due strategie per limitare questo problema: utilizzare sistemi multilivello oppure usare due portanti in quadratura. Qui di seguito viene illustrata quest’ultima possibilità che permette di trasmettere due bit utilizzando la metà della banda unendo coppie di bit in simboli di durata $T_s = 2T_b$.

Come mostrato in Figura 12.33, il segnale $b(t)$ in ingresso con frequenza $f_b = \frac{1}{T_b}$ viene fatto passare attraverso un blocco *demux* che produce due segnali $b_e(t)$ e $b_o(t)$ con frequenza dimezzata $\frac{f_b}{2}$. I due segnali così ottenuti vengono moltiplicati per due portanti fra loro perpendicolari, rispettivamente $\sqrt{P_s} \cos(2\pi f_0 t)$ e $\sqrt{P_s} \sin(2\pi f_0 t)$; si noti come, a causa del funzionamento del demux che suddivide le informazioni del segnale in ingresso mandandole alternativamente alle due uscite, i due segnali $b_e(t)$ e $b_o(t)$ risultino sfasati di T_b secondi. In Figura 12.34 è mostrato in dettaglio questo fatto. Una modulazione di questo tipo prende il nome di *QPSK (Quadrature Phase-Shift Keying)*; qualora invece si introduca volutamente un ritardo pari a T_b sulla linea di $b_o(t)$ al fine di mettere in fase le due uscite del demux, si ottiene un sistema di modulazione detto *NO-QPSK (Non Offset QPSK)*.

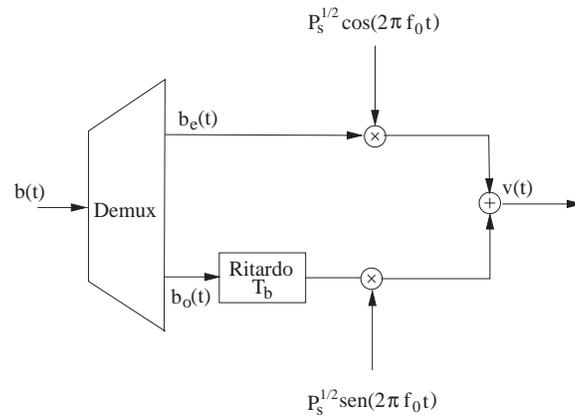
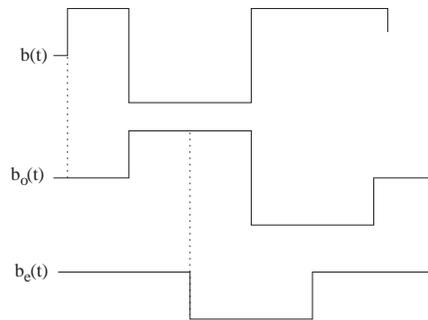


Figura 12.33: Modulazione NO-QPSK

Figura 12.34: Andamento segnali $b_e(t)$ e $b_o(t)$

b_e	b_o	n	$\phi(n)$
+1	+1	0	$-\frac{1}{4}\pi$
+1	-1	1	$-\frac{3}{4}\pi$
-1	-1	2	$-\frac{5}{4}\pi$
-1	+1	3	$-\frac{7}{4}\pi$

Tabella 12.2: Modulazione QPSK e NO-QPSK

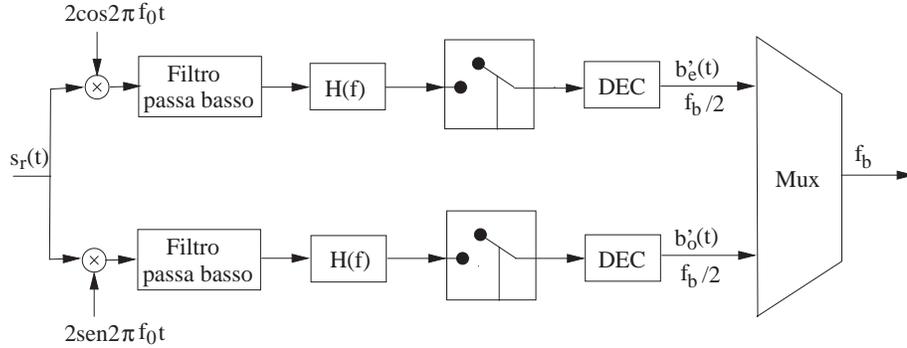


Figura 12.35: Demodulatore QPSK

I due segnali ottenuti dalla moltiplicazione con le portanti risultano dei segnali di tipo BPSK e vengono sommati ottenendo

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \sqrt{P_s} b_o(t) \sin(2\pi f_0 t) + \sqrt{P_s} b_e(t) \cos(2\pi f_0 t) = \\
 &= \sqrt{2P_s} \cos[2\pi f_0 t + \phi(n)] = \\
 &= \sqrt{2P_s} \cos[2\pi f_0 t - (2m + 1)\frac{\pi}{4}]
 \end{aligned}$$

Con il segnale $v(t)$ di potenza media P_s si trasmettono due sequenze di bit contemporaneamente grazie all'utilizzo di due portanti in quadratura. Si considera un alfabeto composto da due bit di modo da avere quattro simboli per codificare la fase $\phi(n)$ appena introdotta; nella Tabella 12.2 sono mostrati i valori di fase utilizzati e il legame coi valori logici di b_e e b_o .

In Figura 12.35 è mostrato lo schema del demodulatore QPSK.

Per quanto riguarda la banda che è necessario garantire al fine di eliminare l'interferenza intersimbolica, si ha che

$$B = 2\frac{1}{2}f_s(1 + \delta) = \frac{f_b}{2}(1 + \delta)$$

in cui alla formula per il calcolo della banda in sistemi BPSK è stato sostituito $f_s = \frac{1}{2}f_b$ poiché i due segnali BPSK che vanno a sommarsi hanno tempo di bit pari a $2T_b$. Si noti che entrambi i segnali BPSK considerati occupano lo stesso intervallo spettrale. La banda necessaria al sistema risulta quindi pari a metà di quella della modulazione BPSK o della trasmissione in banda base.

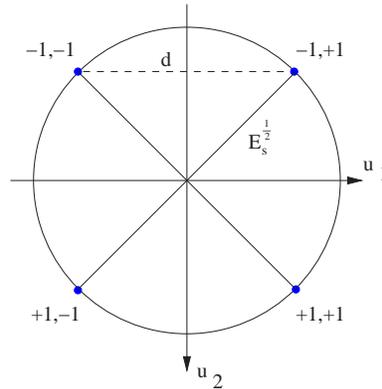


Figura 12.36: Rappresentazione geometrica QPSK

Rappresentazione geometrica e probabilità d'errore I quattro simboli utilizzati da questo sistema di modulazione possono essere espressi in funzione di due forme d'onda base $u_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_0 t)$ e $u_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin(2\pi f_0 t)$ in cui con il termine T_s si indica il tempo di simbolo, ossia l'intervallo di tempo durante il quale rimane costante b_e o b_o ; risulta $T_s = 2T_b$. Come mostrato in Figura 12.36, i 4 simboli risultano disposti nel piano $u_1 - u_2$ come due coppie di segnali antipodali, disposti simmetricamente su una circonferenza di raggio $\sqrt{E_s}$ pari alla radice dell'energia media di simbolo. Risulta inoltre

$$E_s = P_s T_s = P_s 2T_b = 2E_b$$

Per calcolare la probabilità d'errore di simbolo si procede come nel caso della modulazione in banda base: si sceglie il simbolo meno "fortunato" e si calcola la probabilità di sbagliare con i simboli più vicini (la probabilità di sbagliare con i simboli lontani è trascurabile). Si ha dunque

$$p_s(\varepsilon) = 2 \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{4\eta}\right)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{erfc}\left(\frac{2E_s}{4\eta}\right)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{erfc}\left(\frac{E_b}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

E' possibile effettuare una codifica di Gray dei simboli e di conseguenza la probabilità d'errore sul singolo bit risulta pari a

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{E_b}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

che è uguale a quella di un sistema di modulazione BPSK o comunque a quella di un qualunque sistema di trasmissione binario antipodale.

Conclusioni In definitiva il sistema di modulazione QPSK permette di ottenere la stessa probabilità d'errore di un sistema di trasmissione di tipo BPSK ma con una banda pari alla metà, trasmettendo due flussi binari contemporaneamente. Il prezzo da pagare sta essenzialmente in un maggiore sensibilità ad errori di recupero dei segnali di portante e in un processo di demodulazione più complesso rispetto a quello del BPSK (non è sufficiente in ricezione elevare al quadrato il segnale e passarlo in un semplice filtro).

I sistemi QPSK sono attualmente molto diffusi, ad esempio per la diffusione via satellite di segnali numerici televisivi.

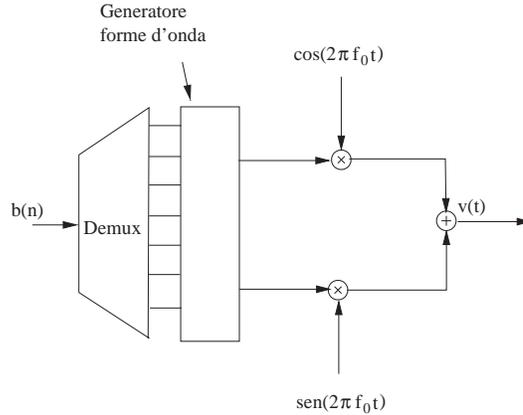


Figura 12.37: Modulatore M-PSK

12.6.4 Modulazione M-PSK

Al fine di diminuire ulteriormente la banda necessaria per la corretta trasmissione e ricezione si considerano sistemi in cui le informazioni siano codificate attraverso M fasi differenti invece che solo quattro come nel caso del QPSK. Questo tipo di modulatori/demodulatori prende il nome di sistemi M -PSK (M -ary Phase-Shift Keying); gli M simboli utilizzati sono composti da N bit, dove $M = 2^N$. Si ha

$$v_m(t) = \sqrt{2P_s} \cos(2\pi f_0 t + \phi(m)) = \sqrt{P_s} \cos \phi(m) \cos(2\pi f_0 t) + \sqrt{P_s} \sin \phi(m) \sin(2\pi f_0 t)$$

in cui $\phi(m) = (2m - 1)\frac{\pi}{M}$ con $m = 0, 1, \dots, M - 1$. Si ha inoltre che il tempo di simbolo è pari a $T_s = NT_b$.

Il segnale $v(t)$ vale dunque

$$v(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} v_i(t - iT_s)$$

in cui con v_i si fa riferimento al v_m che codifica il simbolo trasmesso. In Figura 12.37 è mostrato lo schema a blocchi del modulatore M-PSK in cui si nota come un generatore di forme d'onda provveda a produrre i segnali da modulare a partire da quanto prodotto dal demultiplexer.

Se si procede definendo $e(t) = \sqrt{P_s} \cos \phi(m)$ e $o(t) = \sqrt{P_s} \sin \phi(m)$ è possibile calcolare la densità spettrale di potenza di $v_m(t)$. Si ha infatti

$$G_e(f) = P_s T_s^2 \phi(m) \left(\frac{\sin(\pi f T_s)}{\pi f T_s} \right)^2$$

$$G_o(f) = P_s T_s^2 \phi(m) \left(\frac{\sin(\pi f T_s)}{\pi f T_s} \right)^2$$

in cui i due termini in seno e coseno valgono $\frac{1}{2}$ a causa della distribuzione uniforme di $\phi(m)$. Ne risulta che la densità spettrale di potenza dell'intero processo è pari a

$$G_{M-PSK}(f) = \frac{P_s T_s}{2} \left[\left(\frac{\sin(\pi(f - f_0)T_s)}{\pi(f - f_0)T_s} \right)^2 + \left(\frac{\sin(\pi(f + f_0)T_s)}{\pi(f + f_0)T_s} \right)^2 \right]$$

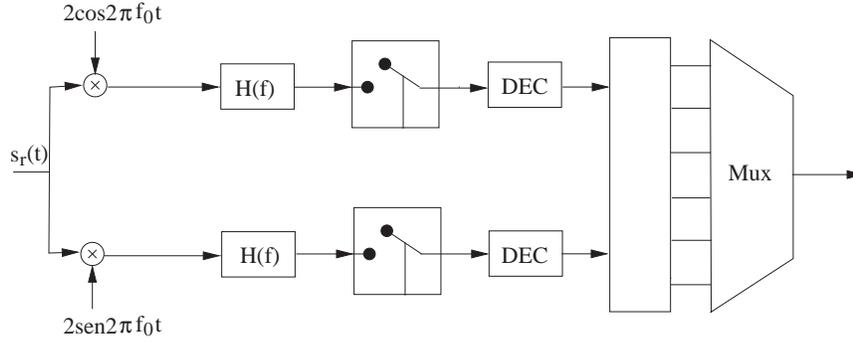


Figura 12.38: Demodulatore M-PSK

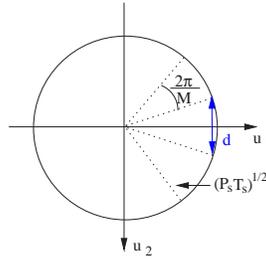


Figura 12.39: Rappresentazione geometrica M-PSK

In Figura 12.38 è mostrato lo schema del demodulatore M-PSK: i due blocchi posti dopo i campionatori decidono i valori rispettivamente di $\cos \phi(m)$ e di $\sin \phi(m)$; basandosi su queste informazioni il generatore di forme d'onda decide il valore di $\phi(m)$ trasmesso.

Per quanto riguarda la banda necessaria per evitare l'interferenza intersimbolica, si ha

$$B = 2\frac{1}{2}f_s(1 + \delta) = \frac{f_b}{N}(1 + \delta)$$

Si noti come vi sia una dipendenza lineare dal numero di bit N .

Rappresentazione geometrica e probabilità d'errore In Figura 12.39 è mostrata la disposizione dei vari simboli del M-PSK nello spazio $u_1 - u_2$ usato precedentemente; i vari simboli sono distribuiti sulla circonferenza di raggio pari a $\sqrt{E_s} = \sqrt{P_s T_s}$ a distanza angolare $\Delta\phi = \frac{2\pi}{M}$. La probabilità d'errore su un simbolo, calcolata con le ormai usuali tecniche, risulta pari a

$$p_s(\varepsilon) = 2\frac{1}{2}erfc\left(\frac{d^2}{4\eta}\right)^{\frac{1}{2}} = erfc\left(\frac{NE_b \sin^2 \frac{\pi}{M}}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

considerato che $d = 2\sqrt{E_s} \sin \frac{\pi}{M}$ e $E_s = NE_b$.

E' poi possibile associare una codifica di Gray ai simboli della costellazione M-PSK ed ottenere quindi

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{N}erfc\left(\frac{NE_b(\frac{\pi}{M})^2}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{N}erfc\left(\frac{E_b N\pi^2}{2^{2N}\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

in cui si è considerato che per valori di N relativamente grandi $\sin(\frac{\pi}{M}) \simeq \frac{\pi}{M}$. Dalla relazione appena scritta si nota che nel caso si desideri avere una probabilità d'errore

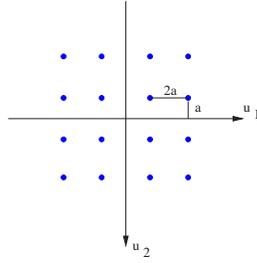


Figura 12.40: Costellazione simboli 16-QAM

indipendente da N occorre aumentare in modo esponenziale l'energia di bit (e quindi la potenza in trasmissione) al crescere di N ; questa operazione è ovviamente fattibile solo per valori molto bassi di N . Dal punto di vista grafico-intuitivo questo fatto è spiegato se si considera che aumentare N significa mettere i simboli sempre più vicini sulla circonferenza e quindi per mantenere costante la probabilità d'errore occorrerebbe aumentare fortemente il raggio della circonferenza stessa, dipendente dall'energia.

12.6.5 Modulazione QAM

Come accennato nel paragrafo precedente, le limitazioni dei sistemi M-PSK stanno nell'eccessivo aumento della probabilità d'errore all'aumentare di N a causa della vicinanza dei simboli sulla circonferenza di raggio $\sqrt{E_s}$; variando anche l'ampiezza dei segnali è possibile tuttavia avere simboli che non cadano sulla circonferenza citata. Sistemi che sfruttano questa tecnica prendono il nome di *QAM* (*Quadrature Amplitude Shift Keying*) o, più in generale, *M-QAM* (*M-ary QAM*) nel caso si utilizzino M simboli.

Si consideri, ad esempio, un sistema 16-QAM; in Figura 12.40 è mostrata la costellazione di simboli nel piano definito dalle forme d'onda base $u_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi f_0 t)$ e $u_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin(2\pi f_0 t)$. I parametri del sistema sono: $N = 4$, $M = 16$ e $d = 2a$.

E' possibile calcolare l'energia di simbolo; a tal scopo è sufficiente calcolare l'energia media dei quattro simboli di un solo quadrante e si ha

$$E_s = \frac{1}{4}(2a^2 + 10a^2 + 10a^2 + 18a^2) = 10a^2$$

Per quanto riguarda invece la probabilità d'errore sul simbolo, risulta

$$\begin{aligned} p_s(\varepsilon) &= 4 \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d^2}{4\eta}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 \operatorname{erfc}\left(\frac{a^2}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2 \operatorname{erfc}\left(\frac{E_s}{10\eta}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 \operatorname{erfc}\left(\frac{4E_b}{10\eta}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Supponendo di effettuare una codifica di Gray dei simboli, è possibile ricavare anche la probabilità d'errore sul singolo bit che è pari a

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{4} 2 \operatorname{erfc}\left(0.4 \frac{E_b}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(0.4 \frac{E_b}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

La trasmissione e la ricezione vengono effettuate in modo analogo a quanto visto per i sistemi MPSK, tuttavia vengono codificati segnali in cui cambia anche l'ampiezza e non solo la fase. Dal punto di vista degli impulsi in ingresso, tuttavia, non vi sono variazioni e si hanno sempre impulsi rettangolari; la banda del sistema risulta quindi pari a

$$B = 2 \frac{f_s}{2} (1 + \delta) = \frac{f_b}{N} (1 + \delta)$$

Si noti dunque che la banda richiesta decresce linearmente con il numero di bit N ; tuttavia è possibile ricavare che per mantenere costante la probabilità d'errore, il rapporto $\frac{E_b}{\eta}$ deve crescere in modo più lento rispetto a quanto avveniva per i sistemi MPSK.

Nella pratica, i sistemi QAM sono la soluzione più efficiente qualora vi siano requisiti molto stringenti sulla banda.

Capitolo 13

Codifica di canale

Nel capitolo 7 ci siamo occupati delle tematiche relative alla codifica di sorgente, abbiamo cioè trattato le tecniche di codifica di segnale che permettono di ridurre la ridondanza e l'irrelevanza del segnale da trasmettere. Ora vogliamo trattare la codifica di canale, cioè le tecniche che ci consentono di aggiungere, opportunamente, ridondanza ai dati da trasmettere, in modo tale da migliorare le prestazioni del nostro sistema di trasmissione e rendendo possibile la correzione, in ricezione, degli errori di trasmissione. Una tecnica possibile è quella di creare una comunicazione a ritroso, mostrata in Figura 13.1, tra il blocco di ricezione e quello di trasmissione. Questa tecnica, chiamata *Automatic Repeat Request* ARQ, richiede al trasmettitore di ritrasmettere i dati ogni volta che si verifica un errore, pertanto non permette di stabilire a priori la velocità di trasmissione. Un altro metodo, descritto nel paragrafo seguente è quello dei sistemi a ripetizione. I sistemi di codifica di canale si possono classificare in due grandi gruppi:

- **codificatori a blocchi** in generale prendono la stringa di bit da codificare, la suddividono in blocchi formati da k bit, che vengono poi trasformati in una sequenza di n bit, con $n > k$. In questo modo ho $n - k$ bit di ridondanza che permettono il controllo e la correzione di errori in ricezione. I codici generati con queste tecniche possono essere classificati ulteriormente come:
 - *codici sistematici* il blocco da n bit può essere suddiviso in due parti, i primi k bit rappresentano i dati, i successivi $n - k$ i bit di ridondanza;
 - *codici non sistematici* la suddivisione, pur esistendo una regola di mappatura, non è possibile;
 - *codici lineari* uno dei modi più semplici per schematizzare la tecnica di codifica a blocchi è quella di pensare ad una cella ROM con in ingresso k bit di indirizzo e in uscita n bit di dati. Solitamente il legame tra ingresso e uscita non è lineare (*codici non lineari*), nei *codici lineari* tale legame è, appunto, lineare;

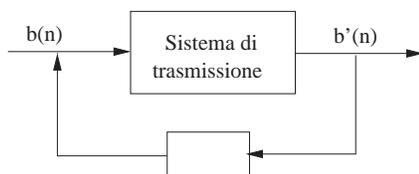


Figura 13.1: Automatic Repeat Request (ARQ)

- **codificatori sequenziali** possono essere schematizzati con una *black box* in cui si ha in ingresso una sequenza di bit ad una frequenza f_B ed in uscita un flusso a frequenza maggiore $f'_B > f_B$. Osservando i flussi in ingresso ed in uscita non è così semplice ed immediato determinare il modo in cui sono aggiunti i bit di ridondanza. I codici ottenuti sono normalmente chiamati **codici convoluzionali**

13.1 Sistemi a ripetizione

Questa tecnica di codifica si basa sulla trasmissione di ogni bit che compone il messaggio, un numero M di volte (possibilmente dispari). Il ricevitore deve essere in grado di dividere opportunamente, in blocchi di dimensione M , il flusso di informazioni ricevute, poi decodifica il messaggio in base al bit che si presenta il maggior numero di volte (codifica a maggioranza). Ad esempio, trasmettendo tre volte ogni bit, il ricevitore deciderà per il messaggio 1 in caso di ricezione di 011, mentre per il messaggio 0 se la stringa ricevuta è 010. Essa non richiede informazioni al trasmettitore oltre a quelle già ricevute, viene pertanto definita codifica *Forward Error Correction* FEC. Ovviamente la banda richiesta per trasmettere il nostro segnale aumenterà in proporzione al numero di ripetizioni di ogni bit. Valutiamo ora le prestazioni, in termini di probabilità di errore, di questa tecnica di trasmissione. Supponiamo che la probabilità di errore sul singolo bit sia rappresentata da p , si voglia poi trasmettere ciascun bit tre volte, in ricezione venga applicata una decisione a maggioranza. In questa situazione si ha un errore in ricezione quando almeno due dei tre bit trasmessi sono ricevuti in modo errato. La probabilità di errore diverrà quindi

$$p(\varepsilon) = p^3 + 3(1-p)p^2 = p^3 + 3p^2 - 3p^3 \simeq 3p^2$$

vanno infatti sommati il termine p^3 che rappresenta l'unica possibilità di ricevere in modo errato tutti e tre i bit e il termine $3(1-p)p^2$ che rappresenta i tre modi possibili di ricevere in modo errato due bit su tre. Nel risultato finale, trascurando il termine $-3p^3$ si effettua una stima conservativa. In generale, se trasmetto ogni bit M volte (con M dispari) avrò un errore in ricezione quando i bit errati superano $\frac{M+1}{2}$, la formula diventa quindi

$$p(\varepsilon) = \sum_{i=\frac{M+1}{2}}^M \binom{M}{i} p^i (1-p)^{M-i}$$

dove $\binom{M}{i} = \frac{M!}{i!(M-i)!}$.

13.2 Codificatori a blocchi

Consideriamo una sorgente che genera in trasmissione M messaggi diversi, rappresentabili con k cifre binarie ($2^k = M$). A questi k bit vengono aggiunti r bit di ridondanza. In questo modo ogni messaggio è stato espanso in una parola di codice lunga n bit con $n = k + r$. Il numero di parole che possono essere codificate in questo modo è 2^n , ma il numero totale di messaggi che la sorgente può codificare è 2^k . Il codice è formato dall'unione di un blocco di k bit contenenti l'informazione e da r bit di ridondanza, per questo motivo è chiamato *codice a blocchi*. Tali blocchi possono essere visibili esplicitamente (*codici sistematici*) oppure non essere esplicitamente presenti nel codice (*codici non sistematici*).

13.2.1 Distanza di Hamming

Consideriamo due particolari parole di codice C_i e C_j , indichiamo con d_{ij} la distanza tra le due parole, cioè il numero di bit per cui le due parole differiscono. Ad esempio le parole

$$\begin{aligned} C_i &= 1000111 \\ C_j &= 0001011 \end{aligned}$$

differiscono nel primo, quarto e quinto bit, partendo a contare da sinistra, quindi $d_{ij} = 3$. Assumiamo di aver determinato d_{ij} per ogni coppia di parole presenti nel codice. Il minimo valore di d_{ij} è chiamato distanza minima o *distanza di Hamming* ed è indicato con d_{min} . E' piuttosto intuitivo capire che quando cerchiamo di determinare quale parola di codice rappresenti la stringa che si ha in ricezione che ovviamente potrà avere alcuni bit errati a causa di un rumore, la probabilità di una corretta determinazione sarà maggiore per parole che hanno un grande numero di bit diversi. La maggiore probabilità di sbagliare si ha tra coppie di parole tra le quali la distanza d_{ij} è minima. La distanza di Hamming d_{min} stabilisce un limite superiore all'efficacia di un codice.

Supponiamo di indicare con t gli errori presenti in una parola di codice ricevuta. Allora è necessario che

$$t \leq d_{min} - 1$$

affinché si possa essere in grado di stabilire con certezza che la parola di codice non è valida, ad esempio che non è una parola appartenente al nostro vocabolario. Il codice rileva cioè fino a $d_{min} - 1$ errori. Invece è necessario che

$$2t + 1 \leq d_{min} \leq 2t + 2$$

affinché il codice sia in grado non solo di rilevare che la parola di codice è errata ma anche di correggere l'errore, sia cioè in grado di ristabilire la corretta parola di codice inviata in origine. Si preferisce avere distanza minima dispari. Infatti con $d_{min} = 5$ si correggono fino a 2 errori, con $d_{min} = 6$ altrettanti.

Parlando di codici *lineari* è possibile assimilare il prodotto tra parole di codice all'operazione logica di AND (\wedge) bit a bit e la somma all'operazione logica di XOR (\oplus). Pertanto in questo caso lo XOR bit a bit di due parole di codice mi restituisce una parola del codice stesso che avrà degli 1 se i bit dei due addendi sono diversi, degli 0 se i bit sono uguali. In questo modo sommando gli uno presenti nelle varie parole di codice e considerando quella che dà somma minima avrò la distanza di Hamming.

13.2.2 Decodifica Hard e Soft

Supponiamo di trasmettere una parola di codice su un canale di comunicazione. La trasmissione avvenga in banda base. La forma d'onda $c_i(t)$ abbia un'escursione tra +1 e -1, corrispondenti rispettivamente ai valori logici 1 e 0. La forma d'onda $\sqrt{P_s}c_i(t)$ pertanto ha una potenza di segnale pari a P_s . Una parola di codice è formata da una sequenza di n bit emessi con tempo di bit pari a T_b . Un rumore bianco con densità spettrale di potenza pari a $\frac{\eta}{2}$ si somma al segnale utile. Ad ogni tempo di campionamento noi prenderemo una decisione definitiva (*hard*), decideremo cioè in modo irrevocabile il valore di un bit. Poi memorizziamo i bit fino a quando non abbiamo assemblato un'intera parola di codice. Infine passiamo la parola di codice all'hardware appropriato in cui la parola di codice ricevuta viene comparata con tutte le parole di codice valide. La parola di codice scelta sarà quella che differisce per il minor numero di bit dalla parola ricevuta. Lo schema a

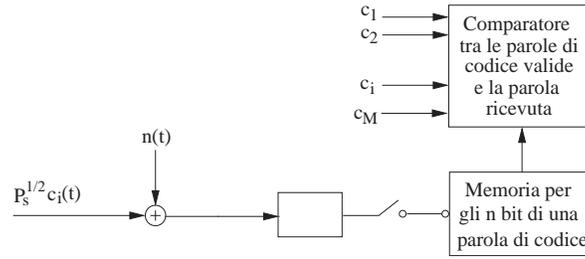


Figura 13.2: Schema a blocchi di un decodificatore “hard”

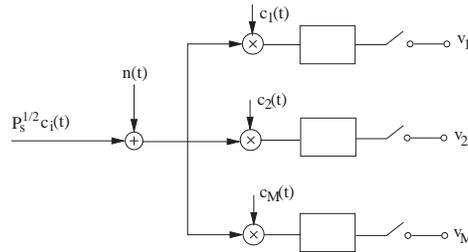


Figura 13.3: Schema a blocchi di un decodificatore “soft”

blocchi di un decodificatore con tecnica *hard* è mostrato in Figura Per minimizzare la probabilità di errore è necessario effettuare la correlazione del segnale ricevuto e del rumore con tutti i possibili segnali e scegliere il segnale avente la maggiore correlazione. Per fare ciò è necessaria una tecnica che non effettui una decisione bit a bit ma solo una decisione finale. Tale tecnica è chiamata decodifica *soft* e l'hardware che richiede è estremamente complesso. Lo schema per una decodifica soft è mostrato nella Figura 13.3. Il segnale modulato in banda base a cui si somma il rumore viene correlato con tutte le possibili forme d'onda c_1, c_2, \dots, c_M . La decodifica è fatta cercando la massima correlazione tra il segnale entrante e le parole di codice generate localmente. La parola di codice ricevuta, a cui si somma un rumore è posta in ingresso a una serie di correlatori realizzati tramite un nodo moltiplicatore seguito da un integratore. L'intervallo di integrazione coincide con il tempo di campionamento. Calcoliamo ora la probabilità di errore per entrambi i sistemi di decodifica.

Probabilità di errore per una decodifica soft Supponiamo di avere un sistema antipodale e usiamo l'approssimazione *union bound*, prendiamo ad esempio i segnali in Figura 13.4; ipotizziamo poi che tutte le coppie di simboli abbiano tra loro distanza pari alla distanza minima. Indichiamo con E_b l'energia media associata ad ogni bit prima della codifica. La probabilità di errore sul simbolo è data da

$$p_s(\varepsilon) = (m-1) \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d^2}{4\eta} \right)^{\frac{1}{2}} = (m-1) \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{kE_b}{\eta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

In realtà l'energia che va considerata è solamente quella dei bit diversi pertanto

$$p_s(\varepsilon) = (m-1) \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{kE_b d_{min}}{\eta n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

usando l'approssimazione per valori grandi dell'error function complementare si ottiene

$$p_s(\varepsilon) \simeq \frac{2^k}{2} e^{-\frac{kE_b d_{min}}{\eta n}}$$

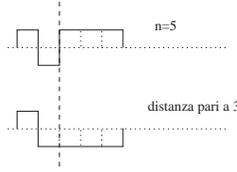


Figura 13.4: Segnali formati da 5 bit con distanza pari a 3

Probabilità di errore per una decodifica hard La probabilità di errore su un singolo bit è data da

$$p_b(\varepsilon) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{kE_b}{n} \frac{1}{\eta} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{2} e^{-\frac{kE_b}{n\eta}}$$

La probabilità di errore sul simbolo è data dalla probabilità di avere più di t errori

$$p_s(\varepsilon) = \binom{n}{t+1} p_b^{t+1} (1-p_b)^{n-t-1}$$

Trascurando il termine $(1-p)$ ed ipotizzando di avere almeno $2^k - 1$ possibilità di errore, tramite una serie di approssimazioni conservative otteniamo

$$p_s(\varepsilon) = (2^k - 1) \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{kE_b}{n\eta}} \right)^{t+1} = \frac{2^k}{2} e^{-\frac{kE_b(t+1)}{n\eta}} \sim \frac{2^k}{2} e^{-\frac{kE_b t_{min}}{2n\eta}}$$

Per avere una probabilità di errore analoga a quella ottenibile con una decodifica soft è necessario avere un'energia di bit doppia (circa 3 dB più grande).

13.3 Codifica e decodifica di codici a blocchi

Un codice a blocchi, così come ogni altro codice, è un'invenzione. Il suo valore dipende dall'ingegnosità e dall'intuito del suo inventore. Ci sono poche regole per la creazione di un codice buono ed efficace. In un codice a blocchi, come abbiamo già visto, una parola di codice ha la forma seguente

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_k c_1 c_2 \dots c_r \quad (13.1)$$

Ci sono k bit di informazione e r bit di parità, la parola di codice ha in totale $n = k + r$ bit. Le parole di codice valide sono $M = 2^k$. Una parola non ancora codificata può essere scritta come

$$A = [a_1 a_2 \dots a_k] \quad (13.2)$$

La generazione di un codice a blocchi inizia con la selezione del numero di bit di parità da aggiungere e fatto questo con la definizione di una matrice H

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1k} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2k} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ h_{r1} & h_{r2} & \dots & h_{rk} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (13.3)$$

La matrice H è formata da una sottomatrice h $r \times k$ e da una matrice identità $r \times r$. Nelle espressioni 13.1 e 13.2 le a e le c sono variabili logiche che assumono i valori

0 ed 1. In modo corrispondente anche le h della matrice 13.3 assumono i medesimi valori. L'efficacia di un codice dipende da come vengono scelti questi valori. La matrice H^T si ottiene dalla matrice H scambiando le righe con le colonne. Essa è formata da una sottomatrice identità $r \times r$ e da una sottomatrice h^T che è la trasposta di h e ha dimensioni $k \times r$. Per generare una parola di codice T a partire da una parola non codificata A costruiamo una matrice di generazione G

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_{11} & h_{21} & \dots & h_{r1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & h_{12} & h_{22} & \dots & h_{r2} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & h_{1k} & h_{2k} & \dots & h_{rk} \end{bmatrix}$$

La matrice G è formata da una sottomatrice identità delle dimensioni $k \times k$ e da una seconda sottomatrice h^T . Si può facilmente vedere che

$$GH^T = 0 = HG^T$$

In questo modo una parola codificata T si può ottenere come $T = AG$; è molto importante osservare che le parole di codice così generate hanno la proprietà seguente

$$TH^T = AGH^T = 0$$

indipendentemente dalla parola A .

Supponiamo ora di ricevere un messaggio R , in ricezione si avrà un apposito dispositivo che esegua il prodotto HR^T . Se $HR^T \neq 0$ sappiamo che R non è uno dei messaggi possibili e quindi uno o più bit sono errati. Sotto queste ipotesi ci possiamo domandare come si possa determinare la parola di codice e con che probabilità la nostra scelta sia corretta. Se T è la parola trasmessa e $T \neq R$, dove R è la parola ricevuta, allora possiamo scrivere

$$R = T \oplus E$$

dove E è una parola *errore*. Ad esempio se

$$T^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ed è stato fatto un errore nella posizione numero 5 allora

$$E^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

quindi la parola di codice ricevuta è

$$R^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Osserviamo da questo semplice esempio che un 1 nella parola *errore* E indica un errore nella posizione corrispondente. Il primo passo in un processo di decodifica è la valutazione della **sindrome** S della parola di codice ricevuta, essa è definita come

$$S = HR^T$$

Se la parola di codice ricevuta R è uguale a quella trasmessa T la sindrome sarà, ovviamente, nulla. Ma se ci sono errori si avrà

$$S = HR^T = H(T^T \oplus E^T) = HT^T \oplus HE^T = HE^T$$

Se la sindrome non è nulla si ha un'indicazione del fatto che ci sono uno o più errori. Se invece è nulla significa che non sono stati fatti errori in trasmissione oppure che gli errori sono così tanti che la nostra parola si è trasformata in un'altra parola appartenente al codice. Se $S \neq 0$ essa ci fornisce informazioni sulla posizione in cui potrebbe esserci un errore. In generale si ottiene infatti un sistema di r equazioni in n incognite, esso avrà 2^k possibili soluzioni. Per determinare la soluzione utile va poi considerato quale dei vettori errore siano più probabili. Vanno sicuramente scartati quei vettori in cui il numero di errori sia maggiore del potere correttivo del codice.

13.3.1 Codice a ripetizione

In un codice a ripetizione uno 0 è codificato come una sequenza di $(2t + 1)$ zeri, analogamente per il numero binario 1. In questo caso $k = 1$, $r = 2t$ e $n = 2t + 1$. Considerando il caso in cui $t = 1$ si ottiene un codice $(n, k) = (3, 1)$. Ovviamente

$$\begin{aligned} A &= [a_1] \\ T &= [a_1 a_1 a_1] \end{aligned}$$

La matrice di generazione sarà $G = [111]$, la matrice $H = \begin{bmatrix} h_{11} & 1 & 0 \\ h_{21} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

13.3.2 Codice di Hamming

Il codice di Hamming è un codice in cui $d_{min} = 3$ pertanto $t = 1$ e quindi può essere corretto un solo errore. Il numero n di bit nella parola di codice, il numero k di bit di informazione e il numero r di bit di ridondanza sono legati in questo modo

$$n = 2^r - 1$$

$$k = 2^r - 1 - r$$

Per $r = 3$ abbiamo un codice $(n, k) = (7, 4)$, per $r = 4$ un codice $(15, 11)$. La matrice H ha r righe e n colonne. Nessuna colonna è formata da soli zeri, tutte le colonne sono diverse, in modo da garantire l'indipendenza. La matrice per il codice $(7, 4)$ è

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che leggendo gli 0 e gli 1 della matrice come numeri binari ogni singola colonna rappresenta un numero decimale da 1 a 7. L'ordine delle colonne non

rispecchia, ovviamente tale numerazione. Naturalmente un differente ordinamento delle righe genera un insieme diverso di parole di codice, ma ognuno di questi insiemi è ugualmente valido. L'ordine utilizzato nella matrice scritta sopra permette di generare un codice *sistematico*.

13.3.3 Codice di Hadamard

Una parola di codice in un codice di Hadamard rappresenta una riga della matrice di Hadamard. Tale matrice ha dimensioni $n \times n$ dove $n = 2^k$, solitamente k rappresenta il numero di bit della parola non codificata. Una parola di codice è formata da tutti 0, tutte le altre hanno metà 0 e metà 1. La matrice di Hadamard che permette di generare due parole di codice è

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e le parole di codice sono 00 e 01. La matrice di codice che fornisce 4 parole è

$$M_4 = \begin{bmatrix} M_2 & M_2 \\ M_2 & M_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dove M_2^* corrisponde alla matrice M_2 con tutti gli 0 e gli 1 invertiti.

13.3.4 Codice Reed-Solomon (RS)

I codici a blocchi che abbiamo analizzato fino ad ora sono organizzati in base a singoli bit. Tipicamente una parola di codice ha k bit di informazione, r bit di parità ed un totale di $n = k + r$ bit in una parola. Il codice a blocchi detto di Reed-Solomon è organizzato sulla base di gruppi di bit. Questi gruppi sono indicati come simboli. Supponiamo di memorizzare una sequenza di m bit e di lavorare con questa anziché con i bit trattati individualmente. Un codice di Reed-Solomon ha le seguenti caratteristiche: ha k simboli di informazione, r simboli di parità ed una parola di codice è lunga $n = k + r$ simboli. Il numero di simboli in una parola di codice è $n = 2^m - 1$. Un codice RS è in grado di correggere gli errori in t simboli se $t = r/2$. Ad esempio assumiamo che $m = 8$, allora $n = 2^m - 1 = 2^8 - 1 = 255$ simboli in una parola di codice. Se si desidera che $t = 16$ allora è necessario che $r = 32$ da cui $k = 255 - 32 = 223$. I bit errati che possono essere corretti in una parola sono $t * m = 128$.

13.3.5 Interleaving

Spesso capita che gli errori capitino in sequenze (*bursts*), ad esempio nel caso di un graffio su un CD. Una delle principali tecniche per ovviare a questo inconveniente è l'*interleaving*. Uno dei modi più semplici per realizzare questa tecnica è quello di scegliere una struttura di memorizzazione dei dati a matrice.

Vogliamo valutare quale miglioramento portano i codici a blocchi sulla probabilità di errore, supponiamo di indicare con p la probabilità di errore sul singolo bit prima della decodifica. Ipotizziamo che tutte le coppie di codice abbiano come distanza

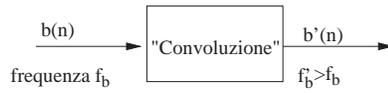


Figura 13.5: Schema a blocchi della realizzazione di un codice convoluzionale

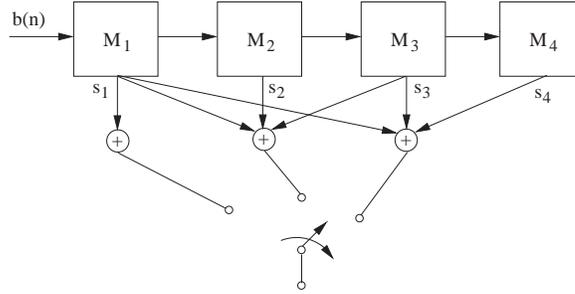


Figura 13.6: Rappresentazione del processo di convoluzione

d_{min} . Il simbolo ricevuto è in errore se sono errati almeno $t + 1$ bit. Quindi, tralasciando i casi in cui si hanno $t + 2, t + 3, \dots, n$ bit errati

$$p_s(\varepsilon) = \binom{n}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{n-t-1}$$

può essere tralasciato anche il termine relativo a $(1-p)$. Quindi

$$p_s(\varepsilon) = \binom{n}{t+1} p^{t+1}$$

Supponendo che $t = 1$ e $d_{min} = 3$ la probabilità di errore diventa

$$p_s(\varepsilon) = \frac{n!}{2(n-2)!} p^2 = \frac{n(n-1)}{2} p^2$$

e quindi avendo posto $n = 7$ e $p = 10^{-4}$ passa a $p_s(\varepsilon) = 21 * 10^{-8}$.

Valutare la probabilità d'errore sul bit dopo la decodifica è estremamente complesso e normalmente viene fatto tramite simulazione. Nel caso in cui si utilizzi un codice di Hamming, in cui tutte le coppie distano tra loro 3, ho che il codice riesce a correggere solamente 1 bit errato. Se i bit errati sono due n dopo la decodifica i bit errati saranno tre e quindi la probabilità d'errore sul bit dopo la decodifica vale

$$p'(\varepsilon) = p_s(\varepsilon) \frac{3}{n}$$

e con i dati utilizzati prima si ha $p'(\varepsilon) \simeq 10^{-7}$.

13.4 Codici convoluzionali

La realizzazione di un codice convoluzionale può essere schematizzato come in Figura 13.5. Il blocco in cui si svolge l'operazione di convoluzione può essere esploso come mostrato nella Figura 13.6.

Nella Figura 13.6 è mostrato un caso in cui per ogni ingresso si generano tre bit in uscita, che sono ottenuti leggendo i valori

$$\begin{aligned} v_1 &= s_1 \\ v_2 &= s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 \oplus s_4 \\ v_3 &= s_1 \oplus s_3 \oplus s_4 \end{aligned}$$

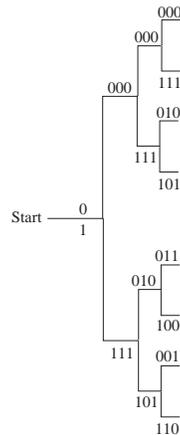


Figura 13.7: Albero relativo a un codice convoluzionale

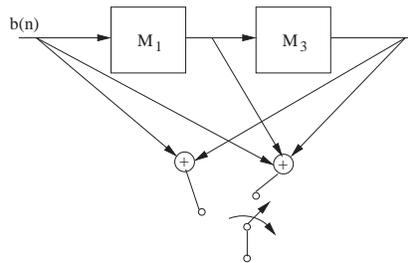


Figura 13.8: Blocco di codifica

L'operazione di codifica è realizzata nel modo seguente: inizialmente si assume che il registro sia inizializzato completamente a zero. Il primo bit del flusso di bit in ingresso entra nel blocco M_1 . Vengono letti i valori in uscita ai nodi sommatore, ottenuti come mostrato sopra. Al passo successivo il bit memorizzato in M_1 passa in M_2 , vengono poi letti i valori in uscita e si prosegue così. Supponiamo di avere come stringa di ingresso $m = 10110$ il flusso di bit in uscita sarà $111\ 010\ 100\ 110\ 001$.

Per la decodifica di un codice convoluzionale si possono usare diverse tecniche, una di queste prevede la realizzazione di un albero. Per la realizzazione dell'albero in Figura 13.7 utilizziamo il blocco di convoluzione in Figura 13.6. Il punto iniziale dell'albero corrisponde alla situazione in cui arriva il primo bit di dati con il registro a scorrimento vuoto. Il primo bit può essere 0 o 1, si sale in alto nell'albero se vale 0, si va in basso se vale 1; si prosegue così per tutti i bit successivi. In decodifica si segue l'albero, se ci sono errori non si trova corrispondenza nei rami e quindi si segue la strada con il minor numero di discrepanze.

Se si considera il blocco di codifica in Figura 13.8 i possibili stati del registro a scorrimento sono 4, 00, 01, 10, 11 e i cambiamenti di stato e le rispettive uscite possono essere rappresentate tramite una semplice macchina a stati finiti, in Figura 13.9. Dando una rappresentazione nel tempo di questa macchina a stati finiti si può osservare come solo alcuni dei cammini siano possibili. In fase di decodifica la ricerca del cammino che permette di avere una decodifica corretta rispettando i vincoli si riduce ad un problema di ricerca operativa, risolto con l'*Algoritmo di Viterbi*.

Solitamente i codici convoluzionali permettono di migliorare la probabilità di errore

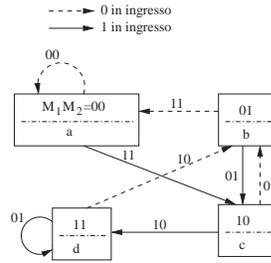


Figura 13.9: Diagramma degli stati del codificatore

portandola anche da 10^{-2} a 10^{-5} , mentre non rendono così bene quando la probabilità di errore prima della decodifica è già molto bassa. Per questo motivo la configurazione tipica prevede un codice a convoluzione seguito da uno a blocchi, ad esempio Reed-Solomon.

13.5 Moltiplicazione di più flussi su un unico canale

Una delle principali esigenze legate alla codifica di canale è quella di poter trasmettere più flussi di bit attraverso lo stesso mezzo trasmissivo, lo stesso canale. Questa operazione è possibile grazie alla moltiplicazione dei segnali da trasmettere; tale procedura può avvenire con diverse strategie:

- moltiplicazione a divisione di frequenza: la banda del mezzo trasmissivo viene suddivisa in parti uguali ed ognuna di essa è assegnata ad un flusso di bit;
- moltiplicazione a divisione di tempo: vengono assegnati dei *time slot* ad ogni flusso di bit di modo che ogni segnale venga trasmesso a turno; questa tecnica richiede generalmente una compressione (aumento di frequenza) dei segnali da trasmettere di modo che possano inviare nel proprio slot tutte le informazioni necessarie;
- moltiplicazione di codice:

13.5.1 Sistemi di trasmissione a spettro espanso

I *sistemi a spettro espanso* detti anche a *moltiplicazione di codice* nacquero originariamente per permettere trasmissioni sicure. Con questi sistemi si mira a spalmare le informazioni da trasmettere su una banda molto larga. Si consideri ad esempio un sistema di trasmissione di tipo BPSK in cui la frequenza della portante venga fatta variare di continuo; questo tipo di trasmissione permette di evitare l'utilizzo indebito delle informazioni da parte di individui non autorizzati e allo stesso tempo fornisce una certa protezione contro eventuali tentativi di disturbare la trasmissione. Si consideri dunque il segnale modulato moltiplicato per una forma d'onda ad impulso $g(t)$ che assume valore $+1$ o -1 :

$$s(t) = \sqrt{2P_s}d(t) \cos(2\pi f_0 t)g(t)$$

Il segnale modulante abbia frequenza di bit f_b mentre la frequenza di $g(t)$, detta *frequenza di chip*, valga $f_c = kf_b$ con k intero positivo piuttosto grande. Il segnale $s(t)$ risulta quindi avere una frequenza di bit maggiore di quella di $d(t)$.

In fase di demodulazione si provvede dapprima a moltiplicare nuovamente per $g(t)$ il segnale $s(t)$ e poi ancora per il doppio della portante, ottenendo

$$s(t)g(t)2 \cos(2\pi f_0 t) = \sqrt{P_s}d(t) + \dots$$

in cui sono stati trascurati i termini a frequenze superiori che vengono opportunamente eliminati con un filtro passa basso (si osservi che $g^2(t) = 1$).

Per quanto riguarda le prestazioni di un sistema di questo tipo, si consideri che il rumore in ingresso al ricevitore viene moltiplicato anch'esso per $g(t)$, ma dato che $g(t)$ e il rumore $n(t)$ sono incorrelati, si ha che $n(t)g(t)$ ha le stesse caratteristiche statistiche di $n(t)$; dunque la probabilità d'errore risulta pari a quella precedentemente calcolata per i sistemi BPSK, ossia

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{E_b}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

con

$$E_b = P_s T_b = P_s \frac{1}{f_b}$$

13.5.2 Applicazioni in ambito militare

Sistemi di trasmissione come quello appena descritto permettono di risolvere problemi di discreta importanza in ambito militare quali la presenza di disturbi atti ad impedire la comunicazione. Si supponga dunque che qualcuno sia interessato a disturbare la nostra trasmissione; per fare ciò questo individuo si servirà di una portante alla frequenza f_0 e irradierà molta potenza a tale frequenza: così facendo si genera interferenza col nostro messaggio originale. Il ricevitore riceverà quindi un segnale pari a

$$s'(t) = \sqrt{2P_s}d(t) \cos(2\pi f_0 t)g(t) + \sqrt{2P_J} \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

dove P_J indica la *potenza di jamming* e il termine θ sta ad indicare che la componente di disturbo sarà sicuramente sfasata rispetto al segnale originario. Il segnale ricevuto viene quindi demodulato:

$$s'(t)g(t)2 \cos(2\pi f_0 t) = \sqrt{P_s}d(t) + \sqrt{P_J}g(t) \cos \theta$$

Il secondo termine, $\sqrt{P_J}g(t) \cos \theta$ può essere visto come un rumore dotato di densità spettrale di potenza pari a

$$G(f) = \frac{\sigma^2}{T_c} |S(f)|^2 = \frac{P_J^2 \theta}{T_c} \left| T_c \frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c} \right|^2 = \frac{P_J}{f_c} \frac{1}{2} \left| \frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c} \right|^2$$

dove $S(f)$ rappresenta ovviamente la trasformata di Fourier dell'impulso base $g(t)$. Poiché $f_c \gg f_b$ e le frequenze f a cui si lavora sono dell'ordine di f_b , la densità spettrale di potenza del disturbo risulta circa pari a

$$G(f) = \frac{P_J}{2f_c}$$

La formula appena espressa mostra che il disturbo generato si comporta essenzialmente come un rumore bianco; l'azione di disturbo viene diffusa omogeneamente

su tutta la banda, provocando quindi problemi minori di quanto si sarebbe potuto aspettare l'individuo che intendeva disturbare la comunicazione. La probabilità d'errore risulta pari a

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{E_b}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{P_s f_c}{P_J f_b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

in cui si è assunta $G(f) = \frac{P_J}{2f_c} = \frac{\eta}{2}$. Si noti come un incremento della frequenza di chip migliori le prestazioni del sistema, favorendo l'immunità ad azioni di disturbo.

13.5.3 Applicazioni in ambito civile

La problematica che aveva portato all'introduzione di questi sistemi di trasmissione in ambito civile era quella della moltiplicazione di più segnali affinché potessero passare contemporaneamente per lo stesso mezzo trasmissivo. Per fare ciò ci si serve di una serie di $g(t)$ diverse ma, ovviamente, a stessa frequenza, scelte in modo da massimizzare la loro incorrelazione. Il segnale composito, dato dalla somma di tutti i segnali nel mezzo trasmissivo, risulta pari a

$$v(t) = \sum_{i=1}^k \sqrt{2P_s} g_i(t) d_i(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_i)$$

Se si desidera, ad esempio, demodulare il primo segnale occorre fare

$$v(t) g_1(t) 2 \cos(2\pi f_0 t + \theta_1) = \sqrt{P_s} d(t) + \dots + \sum_{i=2}^k \sqrt{P_s} g_1(t) g_i(t) d_i(t) \cos(\theta_i - \theta_1)$$

in cui come detto precedentemente vengono tralasciati i termini eliminati dal successivo filtro passa basso. Si noti che $g_{i1}(t) = g_1(t) g_i(t)$ ha ancora frequenza f_c e $g'_{i1}(t) = g_{i1}(t) d_i(t)$ è una sequenza pseudo casuale. Ne segue che l'ultimo termine, indice del rumore introdotto a causa della trasmissione simultanea di più flussi di dati, può essere visto come un processo PAM con densità spettrale di potenza pari a

$$G(f) = \frac{P_s^2 (\theta_i - \theta_1)}{f_c} \left| T_c \frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c} \right|^2 \simeq \frac{P_s}{2f_c} = \frac{\eta}{2}$$

Considerando una trasmissione con k flussi contemporanei si avranno dunque $k - 1$ termini di rumore aggiuntivo del tipo appena descritto; tali contributi si sommano in potenza poiché sono certamente incorrelati fra di loro. La probabilità d'errore risulta quindi

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{E_b}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{E_b}{(k-1) \frac{P_s}{f_c}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{f_c}{f_b} \frac{1}{k-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Si noti come la probabilità d'errore dipenda dal numero di flussi trasmessi contemporaneamente.

Sistemi di trasmissione come questo, a spettro espanso, risultano molto più elastici rispetto a sistemi a divisione di frequenza o di tempo; questi ultimi, infatti, hanno il grande difetto di sprecare risorse qualora in fase di trasmissione vi sia un numero effettivo di flussi inferiore di quanto avrebbe dovuto esserci (rimangono inutilizzati slot di frequenza o di tempo). Un sistema a moltiplicazione di codice, invece, utilizza

sempre tutta la banda e in caso di assenza di uno o più flussi semplicemente garantisce delle prestazioni migliori. Allo stesso tempo questi sistemi permettono di accettare un numero di flussi superiore a quello per cui sono stati originariamente progettati, a patto di sacrificare un po' le prestazioni generali; una possibilità di questo tipo risulta molto utile in determinati ambiti.

Capitolo 14

Criptografia e sicurezza delle comunicazioni

Nell'ambito delle comunicazioni esistono diverse applicazioni per le quali la sicurezza e la riservatezza con cui vengono inviate le informazioni sono molto importanti. Per quanto riguarda la confidenzialità delle comunicazioni vengono utilizzati algoritmi di crittografia.

In Figura 14.1 è mostrato lo schema a blocchi di un tipico sistema di crittografia; una sorgente emette un messaggio X che viene criptato attraverso la chiave di cifratura Z di modo da ottenere il messaggio criptato Y . Tale messaggio può essere interpretato solo possedendo la chiave Z , dunque il destinatario (e solo lui) servendosi della chiave Z decifra il messaggio ricevuto e ne ottiene quello originale, X . Ovviamente, perché il meccanismo descritto funzioni e sia efficace occorre prima di tutto che l'algoritmo di cifratura sia invertibile e sufficientemente sicuro e poi che sia disponibile un canale sicuro per poter fornire la chiave al destinatario senza che nessun altro ne venga in possesso.

Per quanto riguarda le basi teoriche sulle quali si fondano gli algoritmi di crittografia, si fa riferimento agli studi della fine degli anni '40 da parte di Shannon; si considerino messaggi con alfabeto di $M = 2^N$ elementi: si avranno dunque messaggi del tipo $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ trasformati in $Y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_N)$, poiché si assume per semplicità che X e Y abbiano alfabeti di dimensione uguale. Calcolando l'entropia di X si ha:

$$H(X) = \sum_{i=1}^M p(X_i) \log_2 \left(\frac{1}{p(X_i)} \right)$$

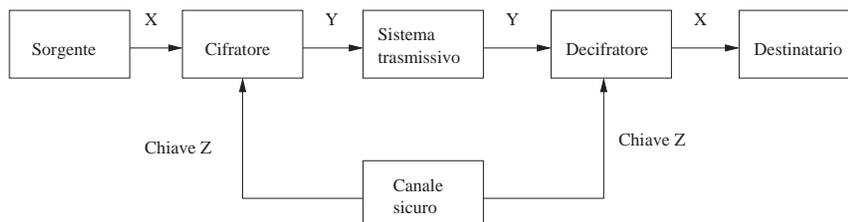


Figura 14.1: Sistema di crittografia

$$\begin{aligned}
H(X|Y) &= \sum_{j=1}^M H(X|Y = Y_j)p(Y_j) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M p(X_i|Y_i)p(Y_i) \log_2\left(\frac{1}{p(X_i|Y_i)}\right) = \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M p(X_i, Y_i) \log_2\left(\frac{1}{p(X_i|Y_i)}\right)
\end{aligned}$$

dove $H(X)$ rappresenta l'incertezza statistica associata ad X , mentre $H(X|Y)$ è un indice dell'incertezza associata ad X quando sia noto il messaggio cifrato Y . Ovviamente l'incertezza di X noto Y nasce dalla non conoscenza della chiave di cifratura.

Si può poi definire l'informazione mutua fra X e Y , data da:

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$$

Quanto più è piccola l'informazione mutua tanto più il sistema di crittografia è sicuro. La condizione di sicurezza perfetta, $I(X; Y) = 0$, si ha quando la conoscenza di Y (e non della chiave) non cambia l'incertezza su X . Valgono le seguenti proprietà sull'informazione mutua:

$$I(X; Y) = I(Y; X)$$

$$I(X; Y) \geq 0$$

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$$

in cui

$$H(X, Y) = \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M p(X_n, Y_m) \log_2\left(\frac{1}{p(X_n, Y_m)}\right)$$

Grazie a quanto detto finora si ricava dunque che

$$H(X|Y) \leq H((X, Z)|Y) = H(Z|Y) + H(X|(Y, Z))$$

Giustamente dato Y l'incertezza nel conoscere X è minore rispetto a quella relativa a conoscere sia X sia la chiave Z .

L'entropia condizionata $H(X|Y, Z)$ è normalmente nulla poiché noto un messaggio cifrato e la chiave utilizzata per crearlo è possibile ricostruire il messaggio originale. Si ha quindi:

$$H(X|Y) \leq H(Z|Y) \leq H(Z)$$

e quindi per avere perfetta segretezza occorre che valga

$$H(Z) \geq H(X)$$

ossia l'incertezza sulla chiave deve essere maggiore o uguale a quella sul messaggio inviato.

La perfetta sicurezza risulta in realtà piuttosto difficile ed onerosa da raggiungere, perciò tipicamente ci si accontenta di un livello di sicurezza tale per cui risulti molto difficile decifrare un messaggio senza conoscere la chiave; per valutare la qualità dei codici di cifratura ci si serve di una cifra di merito detta *distanza unitaria*. Si definisce distanza unitaria la minima lunghezza di un messaggio tale per cui $H(Z|Y) \rightarrow 0$;

essa in pratica rappresenta la quantità minima di testo cifrato necessaria per “rompere” il codice di cifratura. Nel caso particolare di un cifratore detto “cifratore causale” si trova che la distanza unitaria vale

$$N_0 = \frac{k}{r}$$

dove k è il numero di simboli elementari che compongono la chiave utilizzata (dimensione della chiave), mentre r è l'indice di ridondanza del messaggio da decifrare. Messaggi scritti in lingua inglese (ma anche in italiano) hanno mediamente una ridondanza pari a $r = 0,75$; se si utilizza una chiave di 1000 caratteri si ha distanza unitaria $N_0 \simeq 1333$ caratteri: un cripto-analista avendo a disposizione un messaggio cifrato di più di 1333 caratteri potrebbe tentare di decifrare il messaggio praticamente sicuro che qualora trovasse una chiave che genera un messaggio significativo questo sarebbe quello esatto.

E' importante notare, quindi, che è possibile utilizzare codici di cifratura che non assicurano la perfetta sicurezza, ma che siano computazionalmente sicuri poiché richiedono potenze di calcolo assolutamente irraggiungibili per essere violati in un tempo ragionevole. Si consideri, a titolo di esempio, un sistema “a forza bruta” capace di provare una chiave ogni microsecondo per forzare una codifica effettuata attraverso una chiave di 30 caratteri ognuno scelto fra 25 possibili scelte; anche ipotizzando di conoscere già quali caratteri costituiscono la chiave e dovendo unicamente posizionarli in modo corretto si otterrebbero $30! = 3 \cdot 10^{32}$ combinazioni pari ad un tempo di elaborazione di circa 10^{18} anni.

Da questa semplice considerazione segue il fatto che chi desidera forzare un sistema di cifratura si serve di tecniche diverse da quella “a forza bruta”, ad esempio studiando le frequenze di occorrenza dei simboli (caratteri) che compongono il testo cifrato. I moderni sistemi di cifratura tendono quindi a rendere quanto più difficile possibile ogni analisi statistica che possa fornire informazioni utili per la violazione del codice.

14.1 Sistemi di cifratura a blocchi

La prima grande famiglia di algoritmi di cifratura è quella dei sistemi a blocchi; essi operano su insiemi più o meno grandi di dati applicando a ciascun blocco di dati una trasformazione selezionata da una chiave.

I blocchi di cifratura si dividono in due tipi:

- Blocchi a sostituzione: dispongono di una regola di sostituzione di determinati simboli con altri; tale regola è basata sulla chiave e tipicamente è di tipo non lineare. In Figura 14.2 è mostrato un esempio di cifratore a sostituzione (ma con legge fissa, indipendente dalla chiave).
- Blocchi a permutazione: questi sistemi effettuano la permutazione delle posizioni dei simboli; in Figura 14.3 è mostrato un esempio.

Tipicamente si ricorre alla *cifratura a prodotto*: vi è una cascata di diversi blocchi semplici al fine di ottenere una cifratura complessa; in Figura 14.4 è mostrato un esempio di cifratore un po' più complesso di quelli visti finora in cui blocchi di sostituzione e permutazione si alternano; i blocchi di sostituzione operano ognuno

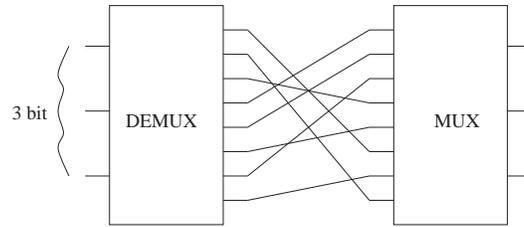


Figura 14.2: Blocco di cifratura a sostituzione

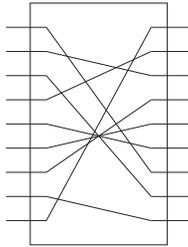


Figura 14.3: Blocco di cifratura a permutazione

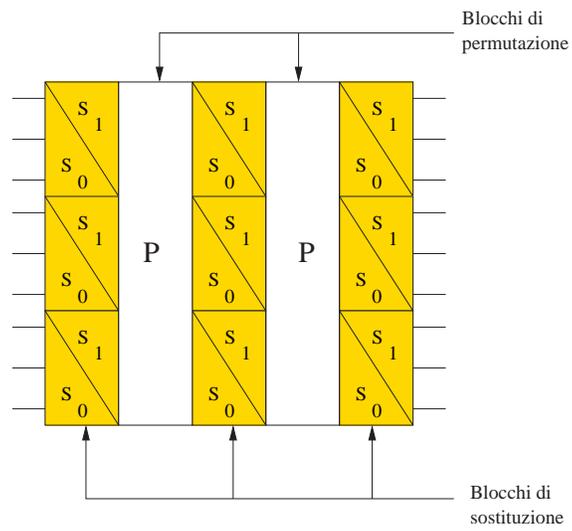


Figura 14.4: Cifratore complesso

devono essere facilmente computabili poiché per criptare e decriptare non devono essere necessarie potenze di calcolo enormi; infine conoscendo E_K deve essere computazionalmente intrattabile il problema relativo all'individuazione di D_K .

I sistemi di cifratura a chiave pubblica possono essere utilizzati anche per la firma elettronica (*Signature Authentication*), ossia in generale per certificare l'identità del mittente del messaggio.

Si supponga ad esempio che A voglia mandare a B un messaggio M garantendo che esso giunga integro e assicurando B che il messaggio stesso sia stato inoltrato proprio da A. A questo scopo A applica il suo algoritmo di decriptazione ad M ottenendo $S = D_A(M)$, poi lo cripta con l'algoritmo pubblico per B ottenendo $C = E_B(S) = E_B(D_A(M))$. Quando riceve il messaggio C l'utente B lo decripta col suo algoritmo D_B e poi con E_A (che è pubblico) ottenendo di nuovo M . In questa operazione B ha la garanzia del fatto che il messaggio sia arrivato integro (solo lui conosce D_B) e allo stesso tempo è certo che sia stato proprio A ad inviarlo (solo A conosce D_A).

Tipologia algoritmi per l'implementazione di sistemi a chiave pubblica

Questi sistemi sono in generale basati sul concetto indicato in inglese come "*trapdoor one-way function*". Si consideri ad esempio la funzione $y = x^5 + 12x^3 + 107x + 123$, dato x è molto facile calcolare y , viceversa conoscendo y è molto difficile calcolare la x corrispondente. I sistemi a chiave pubblica si basano su trasformazioni molto difficili da invertire a meno che non si conoscano alcune caratteristiche delle trasformazioni stesse.

In buona sostanza gli algoritmi di cifratura a chiave pubblica sono basati sul fatto che il resto della divisione fra due numeri interi sufficientemente grandi è praticamente un numero casuale. Inoltre sapere se un numero, anche a molte cifre, sia primo o no è abbastanza poco dispendioso in termini computazionali, ma fattorizzare un numero grande è un'operazione computazionalmente intrattabile.

Algoritmo RSA (Rivest-Shamir-Adelman) In questo schema di cifratura a chiave pubblica dapprima i messaggi vengono rappresentati come serie di interi compresi nell'intervallo $(0, n - 1)$. Ciascun utente ha il suo valore per n e per due altre variabili intere positive e e d . Nel registro delle chiavi pubbliche per ogni utente sono depositati i valori della coppia (n, e) (chiave pubblica), per la decifratura è necessario conoscere un'altra coppia di numeri (n, d) (chiave privata), di cui d è tenuto segreto. Gli algoritmi di cifratura e decifratura sono dati rispettivamente da

$$C = E(M) = (M)^e \text{ modulo } n$$

$$M = D(C) = (C)^d \text{ modulo } n$$

Entrambi gli algoritmi sono di facile implementazione e danno origine sempre a numeri compresi in $(0, n - 1)$. Nello schema in oggetto n è ottenuto moltiplicando fra loro due numeri primi $n = pq$. Mentre n è di dominio pubblico, p e q sono tenuti segreti grazie al fatto che è molto difficile fattorizzare un grande numero. Si calcola poi:

$$\phi(n) = (p - 1)(q - 1)$$

e si può dimostrare come valga la seguente relazione dove X è un intero positivo nell'intervallo $(0, n - 1)$ e k è un intero qualsiasi

$$X = X^{k\phi(n)+1} \text{ modulo } n$$

d è scelto in modo che il massimo comun divisore fra $\phi(n)$ e d sia 1. Qualsiasi numero primo più grande sia di p sia di q è sufficiente. A questo punto e è scelto in modo che ed modulo $\phi(n) = 1$ che è equivalente a scegliere e in modo che

$$X = X^{ed} \text{ modulo } n$$

A questo punto risulta che $D[E(X)] = E[D(X)] = X$ e quindi il sistema funziona correttamente.

Chi voglia fare breccia nel codice conoscendo la parte pubblica della chiave, (n, e) , deve scoprire d e per fare ciò deve trovare p e q . Tuttavia fattorizzare un numero molto grande è praticamente impossibile in tempi umani. Attualmente un algoritmo RSA che lavori con n di più di 512 bit è ritenuto sicuro.

Come ultima nota sui sistemi di criptazione, si consideri che in un'applicazione tipica si utilizza dapprima un sistema a chiave pubblica; ci si scambia una chiave privata e si prosegue utilizzando un sistema a chiave privata. Ovviamente per motivi di sicurezza la chiave privata viene cambiata dopo un certo intervallo di tempo.

Bibliografia

- [1] Herbert Taub, Donald L.Schilling. *Principles of Communication Systems*
- [2] S.Tubaro. *Codifica TV* [Note al corso di comunicazioni elettriche allievi informatici]
- [3] A.Sarti, S.Tubaro. *Probabilità e processi aleatori* [Note al corso di comunicazioni elettriche allievi informatici]
- [4] S.Tubaro. *Trasformata di Fourier, Campionamento, Forme d'onda per trasmissioni PAM* [Note al corso di comunicazioni elettriche allievi informatici]
- [5] S.Tubaro. *Entropia e codifica di sorgente* [Note al corso di comunicazioni elettriche allievi informatici]
- [6] S.Tubaro. *Trasmissione numerica* [Note al corso di comunicazioni elettriche allievi informatici]
- [7] S.Tubaro. *Criptografia e sicurezza delle comunicazioni* [Note al corso di comunicazioni elettriche allievi informatici]